Prosiding Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami
Vol.3, No.1, September 2019, hlm. 396-400
p-ISSN: 2580-4596; e-ISSN: 2580-460X

Radius, Pusat, Diameter, dan Bilangan Radio dari Graf *Flake*

Mohammad Nafie Jauhari
Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
nafie.jauhari@mat.uin-malang.ac.id

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 21 Oktober 2019
Direvisi: 18 November 2019
Diterbitkan: 15 Januari 2020

Kata Kunci:

Flake Graph
Radius
Diameter
Bilangan Radio
Self-Similar

ABSTRAK

Graf yang memiliki sifat *self-similar* telah terbukti memiliki representasi presisi dan akurat terhadap struktur dunia nyata. Struktur tersebut meliputi koneksi jaringan, enkripsi, rima puisi, algoritma pencarian, dan sebagainya. Sering kali sifat-sifat suatu graf dapat dilihat dan ditentukan dengan cara memecah atau mendekomposisi graf tersebut ke dalam bagian-bagian yang lebih kecil yang mengkonstruksi graf tersebut. Kita dapat memeriksa graf konstriktor tersebut untuk mendapatkan sifat-sifat graf yang disusunnya. Pada tahun 2014 penulis mendefinisikan graf *flake* sebagai graf yang disusun dari operasi berurutan dan bertalian dari graf komplit yang mana, dengan suatu algoritma *embedding* tertentu, bentuk geometri yang dihasilkan berbentuk serpih (*flake*) salju.

Masalah umum yang melatarbelakangi pelabelan radio telah dikenal luas sebagai solusi untuk masalah penetapan saluran radio (atau sebarang koneksi nirkabel). Tujuannya adalah untuk menetapkan saluran radio sedemikian sehingga tidak ada gangguan frekuensi antar pemancar radio yang dekat secara geografis dan memiliki jangkuan dan frekuensi yang berbeda-beda.

Artikel ini membahas radius, diameter, dan bilangan radio dari graf *flake*.

Korespondensi:

Mohammad Nafie Jauhari,
Jurusan Matematika,
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang,
Jl. Gajayana 50 Malang
nafie.jauhari@mat.uin-malang.ac.id

1. PENDAHULUAN

Pada tahun 2013 peneliti mendefinisikan dan meneliti graf $(LS)^r(G)$, sedangkan pada tahun 2014 peneliti mengenalkan *flake graph* $\mathrm{fl}[r]$ dan meneliti beberapa sifat dasar dari graf tersebut. Pada penelitian ini peneliti akan membahas mengenai diameter, radius, center, dan bilangan radio dari graf $\mathrm{fl}[r]$.

Pelabelan radio pada graf dimotivasi oleh munculnya permasalahan mengenai *frequency assignment problem* (FAP). Permasalahan tersebut terletak pada penentuan frekuensi radio untuk suatu transmitter pada lokasi yang berbeda tanpa mengakibatkan adanya gangguan akibat tumpang tindihnya frekuensi sekaligus meminimalkan rentang frekuensi yang dihasilkan. FAP sangat berperan dalam jaringan nirkabel dan telah dipelajari untuk masalah-masalah penting dalam frekuensi radio. Menyelesaikan FAP dengan pelabelan adalah sebagai berikut: (1) diberikan sejumlah transmitter yang akan ditentukan frekuensinya dan data sejumlah gangguan frekuensi untuk masing-masing transmitter; (2) Tentukan frekuensi radio masing-masing transmitter sedemikian sehingga tidak terjadi gangguan frekuensi dan minimalkan rentang frekuensi tersebut.

Pada penelitian ini penulis membatasi pembahasan bilangan radio $\mathrm{fl}[r]$ pada dua variannya, yaitu bilangan 1-radio dan bilangan $(d, 1)$-radio dimana $2 \leq d \leq \mathrm{diam}_{\mathrm{fl}(r)}$.

2. KAJIAN PUSTAKA

1. Graf

Graf G merupakan himpunan disjoin (V, E) dimana E merupakan subset dari $V^{[2]}$ dari barisan terurut V. Pada penelitian ini penulis hanya akan meneliti graf berhingga. Artinya, V dan E kedua-duanya adalah himpunan yang berhingga. V adalah himpunan titik, sedangkan E adalah himpunan sisi. Misal G suatu graf, maka $V = V(G)$ merupakan himpunan titik G dan $E = E(G)$ merupakan himpunan sisi dari G. Suatu sisi $\{x, y\}$ dinotasikan dengan xy. Jika $xy \in E(G)$, maka x dan y disebut bertetangga atau titik x *incident* terhadap titik y. Dua buah sisi disebut bertetangga jika memiliki sebuah titik yang sama sebagai salah satu ujungnya.[1]

2. *Clique* dan bilangan independen

Bilangan bulat terbesar r sedemikian sehingga $K_r \subseteq G$ disebut sebagai bilangan *clique* $\omega(G)$ dari suatu graf G. Sedangkan suatu bilangan terbesar r sedemikian sehingga $\overline{K_r} \subseteq G$ (terinduksi) merupakan bilangan independen $\alpha(G)$ dari G. Jelas terlihat bahwa $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$ dan $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$.[1]

3. Pelabelan radio

Termotivasi oleh masalah penentuan frekuensi stasiun radio FM dari *Federal Communication Commission* Amerika Serikat Chartrand dkk [2] mengenalkan *radio k-coloring* dari suatu graf. Aturan pelabelannya adalah sebagai berikut: untuk sebarang bilangan asli k, $1 \leq k \leq diam(G)$, suatu *radio k-coloring* f dari graf G adalah pemasangan bilangan asli tersebut ke setiap titik di G sedemikian sehingga

$$|f(u) - f(v)| \geq 1 + k - d(u, v)$$

untuk setiap titik berbeda u dan v di G. Notasi $d(u, v)$ menyatakan jarak dari titik u ke titik v.

Rentang $rc_k(f)$ dari *radio k-coloring* f untuk G adalah bilangan asli terbesar yang menjadi label suatu titik di G. Rentang minimal *radio k-coloring* dari G disebut sebagai bilangan *radio k-chromatic* $rc_k(G)$.[3]

4. Pelabelan $L(2,1)$ dan $L(d, 1)$

Salah satu varian dari pelabelan radio adalah pelabelan $L(2,1)$ dan $L(d, 1)$. Pelabelan $L(2,1)$ dari suatu graf G merupakan pemetaan dari himpunan titik di graf G ke bilangan bulat tak negatif sedemikian sehingga label dari titik-titik yang bertetangga memiliki selisih paling tidak dua, dan titik-titik yang berjarak dua memiliki label yang berbeda. Rentang dari pelabelan tersebut adalah label maksimum yang digunakan.[4]

Definisi dari pelabelan $L(d, 1)$ mengikuti definisi dari pelabelan $L(2,1)$. Rentang minimum dari pelabelan $L(d, 1)$ dinotasikan dengan $\lambda_{d,1}$.

Definisi 1. Flake graph $\text{fl}[r]$ adalah graf yang dibangun dari K_r dan r buah $\text{fl}[r-1]$ dengan menghubungkan langsung semua titik clique dari $\text{fl}[r-1]$ ke satu dan hanya satu titik di K_r yang berderajat $r-1$. $\text{fl}[2]$ adalah suatu lintasan dengan empat buah titik, P_4.[5]

Sebagai ilustrasi perhatikan Gambar 1 dan Gambar 2.

Teorema 1.[5] Untuk setiap $i \leq r$, banyaknya $\text{fl}[i] \subseteq \text{fl}[r]$ adalah

$$\left|\text{fl}[i]\right| = \frac{r!}{i!}$$

Teorema 2.[5] Bilangan *clique* dari $\text{fl}[r]$ adalah $\omega(\text{fl}[r]) = r$.

Teorema 3.[4] Masalah pelabelan $L(2,1)$ dengan rentang k dapat diselesaikan dalam waktu

$$O((k-1)^n)$$

Definisi 2.[6] Suatu pelabelan $L(d, 1)$ atas graf G adalah fungsi $f: V(G) \to \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga jika $xy \in E(G)$, maka $|f(x) - f(y)| \geq d$ dan jika jarak dari x ke y adalah dua maka $|f(x) - f(y)| \geq 1$.

Teorema 4.[7] Misal P_n adalah suatu lintasan dengan jumlah titik n. Maka (i) $\lambda_{2,1}(P_2) = 2$; (ii) $\lambda_{2,1}(P_3) = \lambda_{2,1}(P_4) = 3$, dan (iii) $\lambda_{2,1}(P_n) = 4$ untuk $n \geq 5$.

Teorema 5.[7] Misal G adalah suatu graf. Maka $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta$.

Teorema 6.[8] Misal G adalah suatu graf. Maka $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta$.

Teorema 7.[9] Misal G adalah suatu graf. Maka $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 2$.

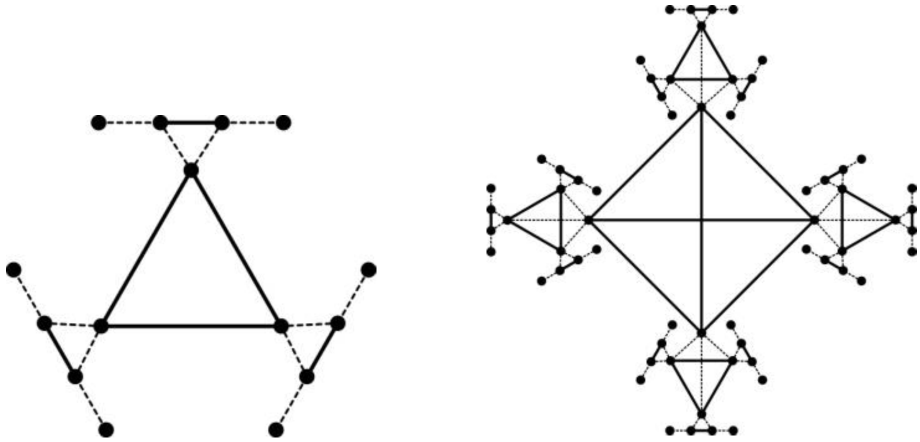
Definisi 3.[10] Graf *chordal* adalah graf dimana setiap *cycle* dengan panjang lebih dari tiga memiliki *chord*.

Graf *chordal* memiliki banyak bentuk aplikasi, khususnya di bidang Biologi. Salah satu contohnya adalah *phylogenetic trees* yang digunakan dalam memodelkan sejarah evolusi spesies, protein, dan lain sebagainya.[10]

Teorema 8.[6] Jika G adalah suatu graf *chordal* dengan derajat maksimum Δ, maka

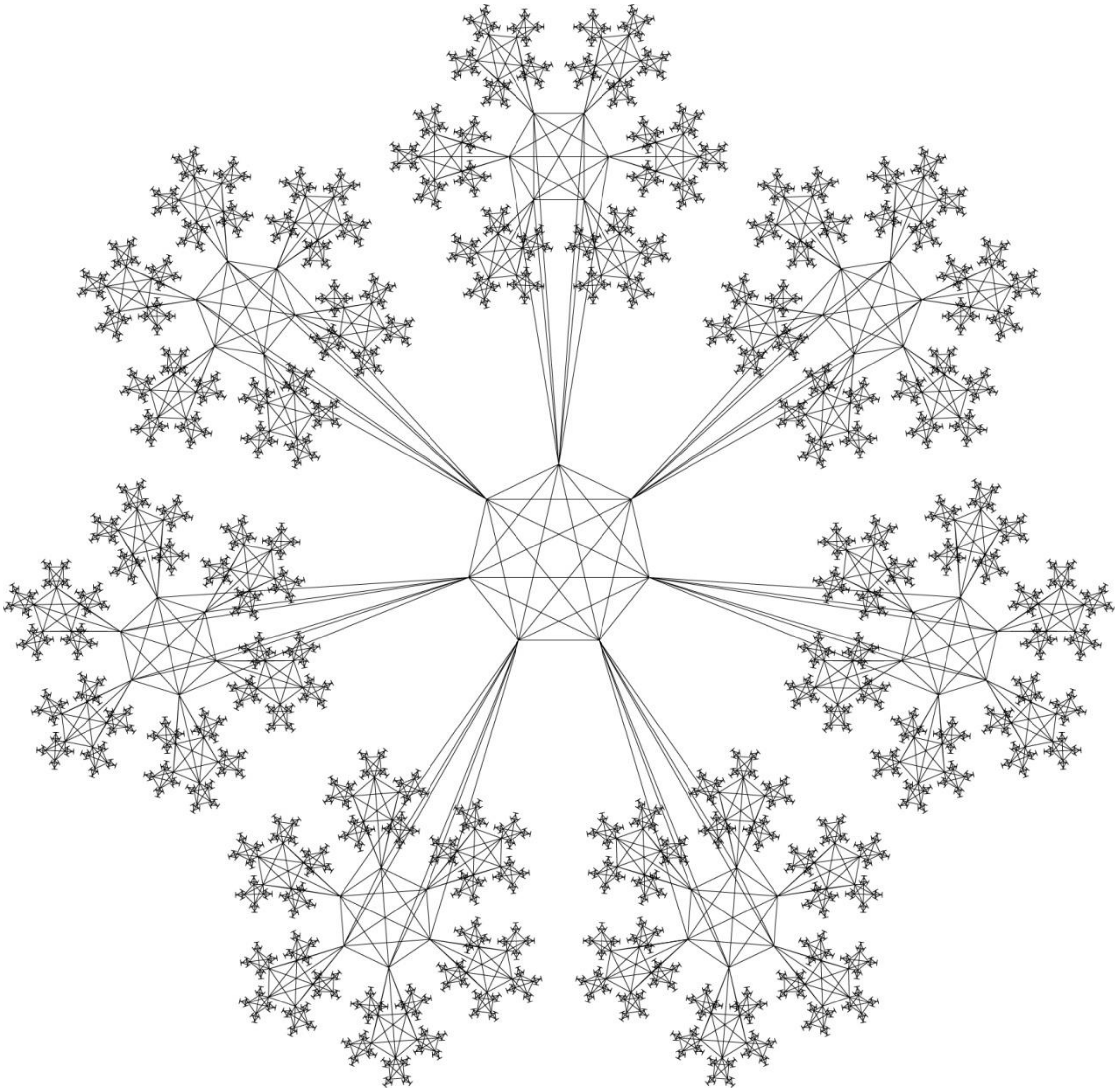
$$\lambda_{d,1}(G) \leq \frac{(2d + \Delta - 1)^2}{4}$$

Teorema 9.[6] (1). Jika G adalah suatu graf *chordal* OSF, maka $\lambda_{d,1}(G) \leq d\Delta$; (2). Jika G suatu graf *chordal SF*, maka $\lambda_{d,1}(G) \leq \Delta + (2d - 2)(\chi(\mathrm{G}) - 1)$.
Teorema 10.[11] Misal G adalah graf. Maka G adalah graf *chordal* jika dan hanya jika setiap separator titik minimalnya adalah komplit.
Teorema 11.[11] Misal $\boldsymbol{G}$ adalah graf *chordal*. Maka $\boldsymbol{G}$ memiliki titik *simplicial*. Jika $\boldsymbol{G}$ bukan graf komplit, maka $\boldsymbol{G}$ memiliki dua titik *simplicial* yang tidak bertetangga.



Gambar 1. fl[3] and fl[4]

Misal $G = (V, E)$ adalah suatu graf dan $U \subset V$. $D_G(v, U)$ menotasikan jarak maksimum dari titik v ke semua titik yang ada di U. Untuk suatu titik v, *eccentricity* dari v,$ecc_G(v)$, merupakan jarak maksimum v ke sebarang titik di G, atau $\max_{u \in V}\{d_G(v, u)\}$ bisa juga ditulis $D_G(v, U)$. Diameter dari suatu graf G merupakan *eccentricity* maksimum dari sebarang titik di G. Radius dari suatu graf G adalah *eccentricity* minimum dari semua titik di G, dan *center* dari graf G adalah titik-titik yang memiliki nilai *eccentricity* yang sama dengan radius.[12]



Gambar 2. fl$[7]$

PEMBAHASAN

Teorema 12. Diameter dari fl$[\boldsymbol{r}]$ adalah $\boldsymbol{diam}_{\mathrm{fl}[\boldsymbol{r}]} = \mathbf{2}\boldsymbol{r} - \mathbf{1}$.

Bukti. Dari definisi, suatu graf fl$[r]$ terbentuk atas r buah fl$[r-1]$ dan suatu K_r yang dihubungkan dengan suatu aturan tertentu. Misal $u, v \in$ fl$[r]$ dan u-v memiliki jarak maksimal di fl$[r]$, maka pasti u dan v berderajat satu. Karena jika u atau v berderajat $n > 1$ maka lintasan $u - v$ bisa kita perpanjang hingga ke titik yang berderajat satu. Misal $G_1, G_2, \dots, G_r$ adalah subgraf terinduksi dari fl$[r]$ dimana G_i isomorf terhadap fl$[r-1]$. Jika $v \in V(\mathrm{fl}[r])$ adalah titik terjauh dari u, maka $v \in V(G_i)$ dan $u \in V(G_j)$ untuk $i, j \in \{1,2,\dots,r\}$ dan $i \neq j$.
Jarak u dan v ke titik $K_r \subset$ fl$[r]$ adalah $r-1$. Karena untuk suatu titik $w \in V(K_r) \subset$ fl$[r]$ maka lintasan $u - w$ atau $v - w$ dibangun oleh $x_1, x_2, \dots, x_r$ dimana $x_i \in V(K_i) \subset$ fl$[i]$. Dengan demikian jarak u ke v adalah $2r-1$. ■

Teorema 13. *Center* dari fl$[\boldsymbol{r}]$ adalah titik-titik $\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K_r} \subset \mathrm{fl}[\boldsymbol{r}]\}$ dimana $\boldsymbol{v}$ berderajat $\mathbf{2}(\boldsymbol{r}-\mathbf{1})$.

Bukti. dari Teorema 12 kita tahu bahwa jika $u, v \in$ fl$[r]$ adalah titik terjauh, maka lintasan $u - v$ selalu melewati K_r dari Definisi 1. Dari definisi tersebut $v \in V(K_r) \subset$ fl$[r]$ yang dimaksud berderajat $2(r-1)$. ■

Teorema 14. Radius dari fl$[\boldsymbol{r}]$ adalah $\mathbf{rad}(\mathrm{fl}[\boldsymbol{r}]) = \boldsymbol{r}$.

Bukti. Dari Teorema 13 mudah dilihat bahwa *eccentricity* minimal dari graf fl$[r]$ adalah r. ■

Teorema 15. Bilangan 1-radio dari graf fl$[\boldsymbol{r}]$ adalah $\boldsymbol{\lambda_1}(\text{fl}[\boldsymbol{r}]) = \boldsymbol{r} - \mathbf{1}$.

Bukti. Dari definisi fl$[r]$ diketahui bahwa $\omega(\text{fl}[r]) = r$. Dengan demikian $\lambda_1(\text{fl}[r]) \geq r - 1$.
Misal $v_0, v_1, \dots, v_{r-1}$ adalah center dari fl$[r]$ dan $0,1, \dots, r-1$ berturut-turut adalah label dari v_i. Tanpa mengurangi perumuman, misal G adalah fl$[r-1]$ yang bertetangga dengan v_0. Kita bisa melabeli center dari G dengan $1,2, \dots, r-1$. Secara umum kita bisa melabeli semua center dari fl$[r-1]$ yang bertetangga dengan v_i dengan label $j = 0,1, \dots, r-1$ dimana $i \neq j$. Jika kita melakukan algoritma ini secara induktif hingga ke fl$[1]$, maka kita peroleh pelabelan yang tidak melebihi $r-1$. Dengan demikian $\lambda_1(\text{fl}[r]) = r - 1$.

■

Teorema 16. Batas atas pelabelan $\boldsymbol{L(d,1)}$dari fl$[\boldsymbol{r}]$ adalah $\boldsymbol{\lambda_{d,1}}(\text{fl}[\boldsymbol{r}]) \leq \mathbf{2}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{r} - \mathbf{1})$.
Bukti. Dari definisi fl$[r]$, kita peroleh beberapa sifat khusus diantaranya:

1. fl$[r]$ adalah graf *chordal*, karena tidak ada C_n: $n \geq 4$ yang merupakan subgraf terinduksi dari fl$[r]$.
2. fl$[r]$ tidak memuat n-sun sebagai subgraf terinduksinya, dengan demikian fl$[r]$

dengan demikian dari Teorema 9 maka

$$\begin{aligned}\lambda_{d,1}(\text{fl}[r]) &\leq \Delta + (2d-2)(\chi(\text{G}) - 1)\\ &= 2(r-1) + (2d-2)(r-1)\\ &= 2d(r-1)\end{aligned}$$

■

Teorema 17. Batas bawah dari pelabelan $\boldsymbol{L(d,1)}$ dari fl$[\boldsymbol{r}]$ adalah $\boldsymbol{\lambda_{d,1}} \geq \boldsymbol{d}(\boldsymbol{r} - \mathbf{1})$

Bukti. Karena $\omega(\text{fl}[r]) = r$ maka paling sedikit kita bisa melabeli *clique* tersebut dengan label $0, d, 2d, \dots, d(r-1)$. Dengan demikian $\lambda_{d,1} \geq d(r-1)$. ■
Batas bawah tersebut relatif trivial dan mudah ditemukan, mengingat graf ini merupakan kelas graf yang relatif baru, maka belum banyak dilakukan penelitian seputar batas bawah rentang $L(d,1)$ dari graf fl$[r]$.

KESIMPULAN

Dari penelitian yang dilakukan, diperoleh kesimpulan:

1. Diameter dari fl$[\boldsymbol{r}]$ adalah $\boldsymbol{diam}_{\text{fl}[r]} = \mathbf{2}\boldsymbol{r} - \mathbf{1}$.
2. Center dari fl$[\boldsymbol{r}]$ adalah titik-titik $\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K_r} \subset \text{fl}[\boldsymbol{r}]\}$ dimana $\boldsymbol{v}$ berderajat $\mathbf{2}(\boldsymbol{r} - \mathbf{1})$.
3. Radius dari fl$[\boldsymbol{r}]$ adalah $\mathbf{rad}(\text{fl}[\boldsymbol{r}]) = \boldsymbol{n} - \mathbf{1}$.
4. Bilangan 1-radio dari graf fl$[\boldsymbol{r}]$ adalah $\boldsymbol{\lambda_1}(\text{fl}[\boldsymbol{r}]) = \boldsymbol{r} - \mathbf{1}$.
5. Batas atas pelabelan $\boldsymbol{L(d,1)}$dari fl$[\boldsymbol{r}]$ adalah $\boldsymbol{\lambda_{2,1}}(\text{fl}[\boldsymbol{r}]) \leq \mathbf{2}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{r} - \mathbf{1})$.
6. Batas bawah dari pelabelan $\boldsymbol{L(d,1)}$ dari fl$[\boldsymbol{r}]$ adalah $\boldsymbol{\lambda_{2,1}} \geq \boldsymbol{d}(\boldsymbol{r} - \mathbf{1})$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Diestel R. Graph theory. 2005. Grad Texts Math 2005.
[2] Chartrand G, Erwin D, Zhang P. A graph labeling problem suggested by FM channel restrictions. Bull Inst Comb Appl 2005;43.
[3] Panigrahi P. A Survey on Radio k -Colorings of Graphs 2009;1:161–9.
[4] Kratochvil J, Kratsch D, Liedloff M. Exact algorithms for L(2, 1)-labeling of graphs n.d.;1.
[5] Jauhari MN. On The Domination Number and Chromatic Number of Flake Graph. Proseding Semin. Int. Pendidik. Mat. dan Teor. Graph UNISMA, 2014.
[6] Chang GJ, Ke W-T, Kuo D, Liu DD-F, Yeh RK. On L (d, 1)-labelings of graphs. Discrete Math 2000;220:57–66.
[7] Griggs JR, Yeh RK. Labelling graphs with a condition at distance 2. SIAM J Discret Math 1992;5:586–95.
[8] Chang GJ, Kuo D. The L(2,1)-labeling problem on graphs. SIAM J Discret Math 1996;9:309–16.
[9] Gonçalves D. On the L (p, 1)-labelling of graphs. Discrete Math 2008;308:1405–14.
[10] Caria P De. A joint study of chordal and dually chordal graphs. Universidad Nacional de La Plata, 2012.
[11] Dirac GA. On rigid circuit graphs. Abhandlungen aus dem Math. Semin. der Univ. Hambg., vol. 25, Springer; 1961, p. 71–6.
[12] Wu BY, Chao K-M. Spanning Trees and Optimization Problems. 2004. Chapman&Hall, London, UK n.d.