Prosiding SI MaNIs (Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami)
Vol.1, No.1, Juli 2017, Hal. 547-555
p-ISSN: **2580-4596; e-ISSN: 2580-460X**

Skema Berpikir Mahasiswa Ketika Mengostruksi Bukti Matematis

Syukma Netti*, Akbar Sutawidjaja, Subanji***, Sri Mulyati******
* Universitas Bung Hatta
** Universitas Negeri Malang

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 15 Mei 2017
Direvisi: 1 Juni 2017
Diterbitkan: 31 Juli 2017

Keyword:

Konstruksi bukti
Skema
Bukti matematis
Asimilasi
Akomodasi

ABSTRACT

Kemampuan konstruksi bukti merupakan kemampuan yang sangat penting dan harus dimiliki oleh siapa saja yang terlibat dengan matematika dan pendidikan matematika, seperti mahasiswa pendidikan matematika. Walaupun kemampuan mengonstruksi bukti sangat penting banyak hasil penelitian yang menyatakan bahwa mahasiswa mengalami kesulitan dalam mengonstruksi Untuk itu perlu ditelusuri proses berpikir mahasiswa ketika mengonstruksi bukti matematis. Bagaimana struktur skema mahasiswa ketika berupaya menyelesaikan masalah pembuktian. Gambaran struktur skema mahasiswa diperoleh dengan mnggunakan metode penelitian kualitatif, dengan memberikan masalah pembuktian kepada mahasiswa. Mereka diminta mengerjakan konstruksi bukti dengan metoda *think aloud*. Jika masih ada hal yang belum terungkap dari proses berpikir mahasiswa dilanjutkan dengan wawancara. Berdasarkan hasil temuan dan analisis data diperoleh 5 model struktur skema mahasiswa ketika mengonstruksi bukti matematis, yaitu (1) kelengkapan skema, (2) ketidaklengkapan skema, (3) ketidakterhubungan skema, (4) ketidaksesuaian skema dan (5) ketidakmatangan skema.

Corresponding Author:

Syukma Netti
Universitas Bung Hatta Padang
Jl. Sumatera Ulak Karang Padang 25133
Email:syukmaneti@bunghatta.ac.id

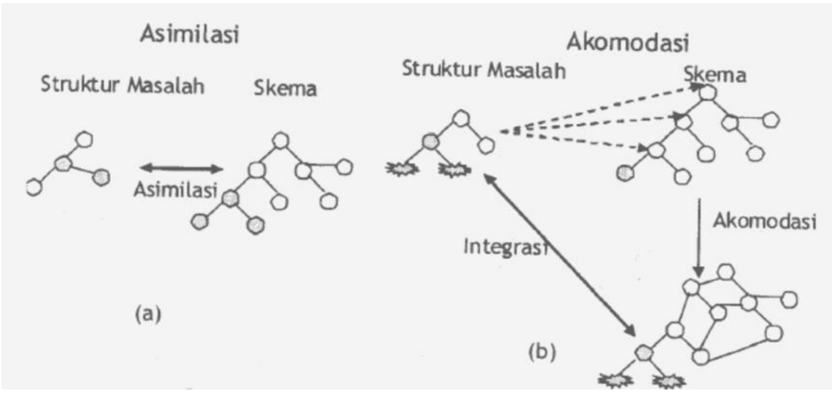
1. Pendahuluan

Bukti dan pembuktian merupakan yang sangat dibutuhkan dalam pembelajaran matematika dan pendidikan matematika [10], [11], [15], [27]. Namun, banyak penelitian menyatakan bahwa bukti dan pembuktian merupakan konsep yang sangat sulit bagi mahasiswa[5], [6], [7].Mencari tahu bagaimana proses berpikir mahasiswa ketika mengonstruksi bukti akan lebih mengenali permasalahan dan ksulitan yang dialami mahasiswa.

Penelitian terkait menelusuri proses konstruksi bukti telah dilakukan oleh peneliti terdahulu ([25], [26], [27], [13], [16]). Menurut [27] ditemukan bahwa penyebab kesulitan mahasiswa dalam mengonstruksi bukti adalah karena mahasiswa tidak memiliki tiga pengetahuan strategik, yaitu (1) pengetahuan tentang teknik pembuktian (2) pengetahuan tentang mana teorema yang penting dan kapan teorema itu harus digunakan (3) pengetahuan tentang kapan untuk menggunakan strategi '*syntactic*'.[16] mengungkap tiga penyebab mahasiswa kesulitan dalam mengonstruksi bukti yaitu (1) Mahasiswa tidak mengonstruksi berdasarkan kerangka kerja bukti, (2) mahasiswa tidak mampu membongkar atau mengurai konklusi, (3) mahasiswa tidak tepat dalam menggunakan definisi.

Penelitian ini juga mengaji bagaimana proses yang dilalui mahasiswa ketika berupaya mengonstruksi bukti matematis. Namun, penelitian initidak hanya memperhatikan aktifitas fisik dan mental tetapi lebih pada struktur mental (skema) yang dimiliki mahasiswa. Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan proses yang dijalani mahasiswa selama mengonstruksi bukti matematis dengan menggunakan kerangka kerja asimilasi dan akomodasi dari Piaget. Proses asimilasi dan akomodasi sangat erat kaitannya dengan skema (struktur mental) mahasiswa. Penelusuran proses yang dilalui mahasiswa dalam mengonstruksi bukti dilakukan dengan memperhatikan dan mempelajari skema yang dimiliki mahasisiwa.

Asimilasi dan akomodasi merupakan dua proses yang terjadi ketika seseorang berhadapan dengan objek atau kejadian [2]. Asimilasi adalah proses interpretasi secara langsung oleh seseorang terhadap suatu objek atau kejadian dengan menggunakan skema yang ada. Akomodasi adalah proses yang dilakukan seseorang dengan merubah atau menambah skema yang telah ada untuk menginterpretasi objek atau kejadian [9]. Hubungan antara proses asimilasi dan akomodasi dengan skema membentuk siklus. Skema merupakan alat untuk menerima pengetahuan baru [20]. Skema juga merupakan hasil atau buah dari proses asimilasi dan akomodasi [2]. Ilustrasi proses asimilasi dan akomodasi dapat dilihat pada bagan 1 berikut



⟷:Menyatakan kesesuaian struktur masalah dengan struktur berpikir

- - - ►: Menyatakan ketidak sesuaian struktur masalah dengan struktur berpikir.

Bagan1. Proses asimilasi dan akomodasi yang diadopsi dari [18]

Makna yang terkandung dalam gambar 1 adalah jika pola struktur masalah ada dalam skema seseorang maka orang tersebut dapat langsung menginterpretasi masalah yang dihadapi melalui proses asimilasi. Kondisi ini menyatakan orang tersebut telah mengenal objek yang dihadapinya. Namun, jika pola struktur masalah tidak ada dalam skema seseorang maka orang tersebut akan melakukan penyesuaian skema dengan merubah atau menambah skema yang ada (proses akomodasi) untuk dapat menginterpretasi masalah yang dihadapi. Ketika pola skema pada struktur masalah tidak ada dalam skema seseorang barulah orang tersebut dapat melakukan asimilasi atau interpretasi masalah yang dihadapi.

Skema yang terbentuk dari proses asimilasi dan akomodasi tidak selalu benar [2], [18], [19]. Contoh skema yang dimiliki seorang anak, yaitu ketika dia menghitung penjumlahan pecahan sebagai berikut $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$. Anak tersebut mengenterpretasi masalah penjumlahan pecahan tersebut dengan skema yang ada dipikirannya. Proses asimilasinya berlangsung dengan benar secara subjektif dengan skema yang dimiliki anak. Namun, jika disandingkan dengan konsep ilmiah hasil penjumlahan yang dilakukan anak tersebut adalah salah. Beranjak dari fakta tersebut, maka kualitas skema masing-masing individu terhadap suatu konsep tidak sama. Kualitas skema yang beragam akan menghasilkan interpretasi yang berbeda. Kualitas skema mempengaruhi proses yang dilalui mahasiswa dalam mengonstruksi bukti matematis.

2. METODA PENELITIAN

2.1. Subjek

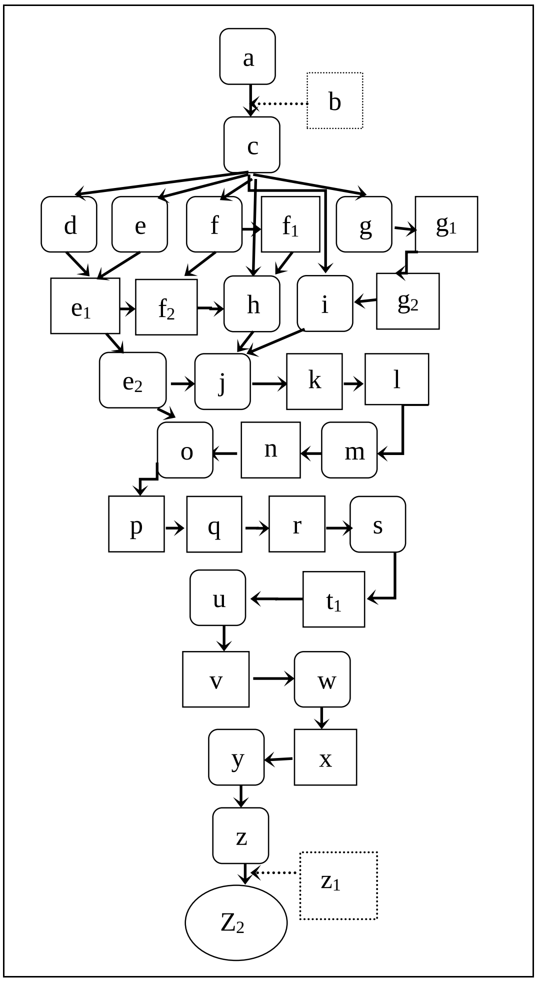
Penelitian ini dilakukan pada mahasiswa yang diasumsikan telah mengenal dan paham dengan bukti dan pembuktian.Subjekdalam penelitian ini adalah mahasiswa pendidikanmatematika Universitas Negeri Malang yang telah mempelajari matakuliah kalkulus dan matakuliah analisis.

2.2. Materi

Masalah pembuktian yang diberikan berkenaan dengan materi pada mata kuliah kalkulus[1], [3]yaitu tentang kekontinuan fungsi. Materi ini dipilih dengan asumsi tidak terlalu sulit dan memungkinkan dapat diselesaikan mahasiswa. Masalah pembuktian yang diberikan satu buah adalah sebagai berikut.

Selesaikan masalah pembuktian berikut: Diberikan himpunan A, dengan $A \subseteq \mathbb{R}, a \in A$ dan dua fungsi $f, g : A \to A$.Jika f dan g kontinu di titik a, buktikanlah bahwa $f + g$ juga kontinu di titik a.

Masalah pembuktian tersebut dibuatkan struktur masalahnya. Struktur masalah adalah struktur berpikir dalam mengonstruks bukti berdasarkan konsep ilmiah [19]. Struktur masalah dari masalah dari masalah pembuktian di atas dapat dilihat pada bagan 2 berikut.



Bagan 2. Struktur Masalah.

Keterangan:

Kd.	Aktifitas /skema	Kd.	Aktifitas /skema
a	Masalah Pembuktian (MaP)	l.	f kontinu di $a \in A$ berarti $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
b.	Membaca MaP	m.	g kontinu di $a \in A$ berarti $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$
c.	Menulis dan Memaknai Premis & Konklusi	n.	generalisasi fungsi kontinu
d.	$A \subseteq \mathbb{R}$	0.	$f + g$ kontinu di $a \in A$, berarti $\lim_{x \to a}(f + g)(x) = (f + g)(a)$
e.	$a \in A$	p.	Pembuktian langsung

e_1	a sembarang bilangan di A	q.	Rangkaian bukti dimulai $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$ dan menuju $(f+g)(a)$
e_2	$a \subseteq \mathbb{R}$	r.	sifat penjumlahan fungsi
f.	$f: A \to A$	s.	$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$
f_1	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	t.	Sifat penjumlahan pada limit
f_2	$f$sembarang fungsi di$A$	u.	$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
g	$g: A \to A$	v.	Nilai limit
g_1	g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	w.	$\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a)$
g_2	g sembarang fungsi di$A$	x.	Sifat penjumlahan fungsi
h.	$f$kontinu *di a*	y.	$f(a) + g(a) = (f+g)(a)$
i.	g kontinu *di a*	z.	menyimpulkan $\therefore f + g$ kontinu di a
j.	Menuliskan buktikan $f + g$ juga kontinu di a	Z_1	Melakukan Refleksi
k.	Skema 3 kriteria fungsi kontinu,	Z_2	Memutuskan selesai

2.3. Prosedur

Pengambilan data dilakukan dengan tahapan sebagai berikut (1) meminta mahasiswa menyelasaikan satu masalah pembuktian, (2) untuk mengetahui proses berpikir dan skema yang digunakan, selama bekerja mahasiswa diminta untuk *think aloud*. (3) untuk lebih memahami prilaku mahasiswa, maka selama mahasiswa berupaya mengonstruksi bukti matematis semua prilaku mahasiswa diamati dan dicatat. (4) Untuk lebih memahami lebih mendalamhasil konstruksi yang dihasilkan dan prilaku mahasiswa selama berupaya mengonstruksi bukti maka dilakukan wawancara dengan mahasiswa. (5) semua aktifitas mahasiswa dari awal mulai bekerja hingga pelaksanaan wawancara direkam dengan kamera video.

Berdasarkan hasil konstruksi bukti, hasil t*hink aloud*, wawancara dan pengamatan dibuat bagan struktur berpikir mahasiswa. Struktur berpikir setiap mahasiswa dibandingkan dengan struktur masalah. Perbedaan dan persamaan antara kedua bagan dianalis dan dibahas untuk mengaji skema mahasiswa.

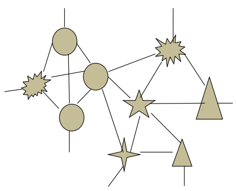
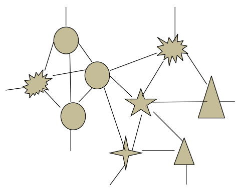
3. HASIL DAN ANALISIS

Masalah penelitian diberikan kepada 20 orang mahasiswa pendidikan matematika Universitas Negeri malang. 3 dari 20 hasil konstruksi bukti matematis mahasiswa dinyatakan valid dan 17 sisanya tidak valid. Semua hasil konstruks bukti yang diolah bauk yang valid maupun yang tidak valid. Dari hasil analisis data diperoleh 5 karateristik skema yang dimiliki mahasiswa. Paparan hasil analisis dilakukan dengan memaparkan prilaku satu subjek untuk satu karakteristik yang representatif untuk setiap kategori. Berikut uraian temuan dari setiap karakteristik skema yang dimiliki mahasiswa ketika berupaya mengonstruksi bukti matematis.

3.1. Kelengkapan skema

Subjek dengan skema yang lengkap merupakan subjek dengan hasil konstruksi bukti matematis yang valid. Dari 3 mahasiswa yang berhasil mengonstruksi bukti diambil satu orang untuk dianalisi dan dipaparkan, yaitu Nani (bukan nama sebenarnya).Skema Nani dikata lengkap karena skemaNani sama dengan skema yang ada pada struktur masalah.Nani berhasil mengonstruksi bukti sesuai dengan konstruksi bukti ilmiah.

Bagan 3 berikut merupakan ilustrasi perbandingan struktur masalah dengan struktur berpikir Nana. Walaupun hasil konstruksi buktinya tidak benar-benar persis, tetapi peneliti memandang secara genaral sama.

	: 
Struktur Masalah	Struktur Berpikir Nani

Bagan. 3. Ilustrasi Kelengkapan Skema

3.2. Ketidaklengkapan Skema

Paparan ketidaklengkapan skema dideskripsikan berdasarkan hasil konstruksi bukti mahasiswa yang bernama Dina (bukan nama sebenarnya). Dina tidak memiliki skema yang lengkap ketika melakukan proses akomodasi saat berhadapan dengan fungsi $f : A \to A$ dan fungsi $g : A \to A$. Dina hanya memiliki subskema sebatas penulisannya saja, seperti makna simbol $f, g, \to$ dan Adapat dikenali Dina.Tetapi subskema tentang bagaimana wujudnya dan maknanya tidak dimiliki Dina.

Berhadapan dengan fungsi $f : A \to A$ dan fungsi $g : A \to A$, harusnya skema yang dimiliki tidak hanya skema tentang bentuk tulisan/representasi simbolik dari fungsi f dan g tetapi juga skema-skema yang lain, diantaranya bahwa, (1) f dan g mewakili tak hingga banyak fungsi yang terdefinisi dalam A, (2) f dan g bisa dalam berbagai berbentuk fungsi (linier, kuadrat dll), (3) f dan g dapat berupa fungsi trigonometri, fungsi rasional dll, (4) Simbol f dan g menunjukan nama fungsi, (5) simbol A menunjukan nama himpunan dan, (6) simbol tanda panah menunjukan pemetaan dari himpunan A ke himpunan A itu sendiri.

Ketidaklengkapan skema Dina tentang konsep fungsi f dan $g$tanpa rumus fungsi atau konsep fungsi dalam bentuk umum membuat Dina tidak dapat memahami dan memaknai fungsi f dan g secara utuh.Dina tidak mampu mengolah dan memanfaatkan f dan g dalam mengonstruksi bukti. Dina juga tidak mampu menerapkan sifat-sifat lain pada f dan g, seperti sifat penjumlahan fungsi, sifat penjumlahan pada limit dan konsep fungsi kontinu di titik a untuk penjumlahan $f + g$.

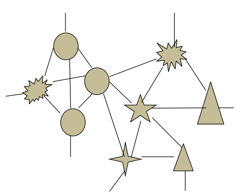
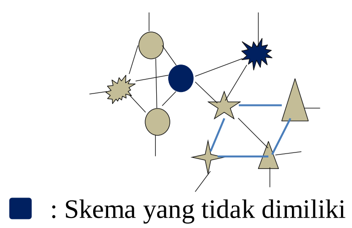
Ketidaklengkapan skema terjadi ketika skema tersebut hilang atau terhapus dari struktur skema mahasiswa.Faktor yang menyebabkan terjadinya skema hilang atau terhapus adalah faktor lupa.Teori yang mengaji tentang faktor lupa ada dua.Menurut [22] ada dua teori yang sangat terkenal yang berkenaan dengan lupa, yaitu teori interferensi dan teori kerusakan (decay).

Interferensi terjadi ketika beberapa informasi masuk berpacu-pacu secara bersamaan sehingga kita melupakan salah satunya.Interferensi terbagi dua, yaitu interferensi retroactive dan interferensi proactive.Interferensi retroactive adalah terganggunya informasi yang telah ada akibat masuknya informasi baru.Sedangkan interferensi proactive adalah informasi yang baru diganggu oleh informasi yang telah ada.

Kerusakan (decay) hanya terjadi dengan berlalunya waktu. Informasi yang tidak pernah digunakan atau dimunculkan maka lama-kelamaan akan hilang atau rusak. Tes kerusakan skema sangat sulit dilakukan karena seseorang akan berusaha memunculkan informasi atau skema yang pernah mereka miliki jika mereka akan dites.

Lupa yang dialami mahasiswa tidak akan mungkin terjadi kerena masalah waktu seperti yang dinyatakan dalam teori Decay. Hampir semua subjek lupa sifat penjumlahan fungsi, padahal tingkat semester mereka berbeda, sehingga faktor waktu bukan penyebab.Konsep penjumlahan fungsi juga bukan hanya dipelajari di satu mata kuliah artinya konsep ini sering digunakan. Maka kemungkinan penyebab yang paling besar yang menyebabkan mahasiswa lupa adalah cara informasi masuk ke dalam memori, seperti yang dinyatakan dalam teori Interferensi.

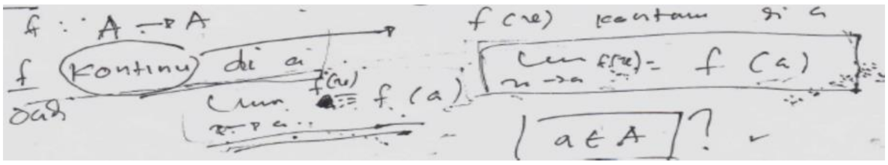
Selain karena faktor lupa berdasarkan teori [22] ketidaklengkapan skema juga bisa terjadi karena tidak bekerjanya fungsi skema.[20] menyatakan bahwa fungsi utama skema ada dua, yaitu mengintegrasikan skema yang sudah ada dan sebagai alat untuk menerima skema baru. Skema Dina yang ada tidak berfungsi sebagai alat untuk menerima skema baru dalam hal ini adalah masalah pembuktian, sehingga Dina tidak bisa memaknai masalah pembuktian secara utuh.Bagan 4.berikut gambaran ketidaklengkapan skema.

	
Struktur Masalah	Struktur Berpikir Dina

Bagan 4. Ilustrasi Ketidaklengkapan Skema

3.3. Ketidakterhubungan Skema.

Kondisi ketidakterhubungan skema dipaparkan berdasarkan hasil konstruksi bukti matematis mahasiswa yang bernama Roni (bukan nama yang sebenarnya). Ketidakterhubungan skema merupakan akibat dari ketidaklengkapan skema. Roni mengalami ketidakterhubungan skema karena Roni tidak memiliki skema yang lengkap ketika melakukan proses akomodasi saat membaca $f, g: A \to A$, Roni menyatakan tidak paham jika fungsi berbentuk umum tanpa diberikan rumus fungsinya. Roni menyatakan jika fungsi yang diberikan dilengkapi dengan rumus fungsi seperti $f(x) = 2x + 3$, maka hal itu akan lebih jelas dan mudah. Tetapi, jika tidak ada rumus fungsinya maka dia merasa seperti berhadapan dengan sesuatu yang tidak jelas. Hal itu terlihat ketika Roni hendak menuliskan definisi f kontinu di titik a.Secara verbal, Roni bisa mengungkapkan bahwa f kontinu di titik $a$yang berarti bahwa nilai limitnya sama dengan nilai fungsinya. Tetapi, Roni tidak bisa langsung menuliskan secara formal. Dia terhenti sesaat dan mempertanyakan bagaimana ini tidak ada x-nya. Setelah beberapa lama akhirnya Roni bisa menuliskannya, seperti yang tertulis dalam lembar kerjanya pada kutipan berikut.



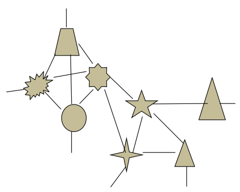
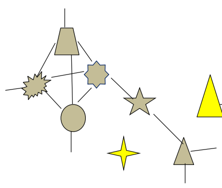
Gambar 1. Interpretasi Roni terhadap definisi$f$ kontinu di titik a.

Gambar 3 di atas menunjukan proses akomodasi yang dilakukan Roni dalam memaknai f kontinu di titik a. Awalnya Roni menulis f kontinu di a yang ada pada bagian kanan atas. Ketika hendak menuliskan secara formal dia tehenti pas pada bagian yang dihitamkan. Hal itu disebabkan dia kesulitan menuliskan definisi karena tidak ada unsur x. Tulisan yang ditunjuk panah panjang menunjukan coretan Roni dalam rangka menemukan cara untuk menuliskan definisi formal f kontinu di titik a. Roni mengandaikan $f(x)$ kontinu di titik a. Dalam skema Roni f dan $f(x)$ merupakan dua hal yang berbeda. Setelah berhasil membangun definisi kontinu untuk $f(x)$, Roni melanjutkan menulis definisi kontinu untuk f sepertiyang ada dibagian bawah pada gambar 3 di atas. Definisi kontinu untuk g dapat dengan lancar ditulis Roni.

Namun, Roni tidak bisa menghasikan konstruksi bukti yang valid. Definisi fungsi kontinu untuk fungsi f dan g yang telah berhasil ditulis Roni tidak bisa dia manfaatkan dengan baik. Roni juga tidak berhasil menulis perluasan definisi fungsi kontinu untuk jumlahan fungsi $f + g$. Roni juga tidak bisa memanfaatkanya.Hasil konstruksi bukti Roni tidak bermakna. Roni tidak dapat memaknai skema-skema yang dimilikinya. Skema-skema tersebut dimiliki Roni tetapi semuanya parsial tidak terhubung satu sama lainya.

Kondisi-kondisi berikut merupakan indikasi terjadinya proses asimilasi dan akomodasi dalam kondisi ketidakterhubungan skema, yaitu (1) Ketika mahasiswa dapat menyebutkan satu atau dua skema tetapi mahasiswa tidak mampu melihat keterkaitan skema tersebut dengan skema lain yang dia miliki. (2) Ketika mahasiswa dapat menuliskan satu konsep tetapi mahasiswa tidak bisa memaknai dan menyadari konsep apa yang dia tuliskan. (3) Mahasiswa bisa menuliskan satu konsep atau sifat tapi mahasiswa tidak mampu memanfaatkannya.

Terjadinya ketidakterhubungan skema selain sebagai akibat ketidaklengkapan skema, juga bisa terjadi sebagai akibat tidak berjalannya fungsi utama skema. [20] menyatakan bahwa fungsi utama skema ada dua, yaitu mengintegrasikan skema yang sudah ada dan sebagai alat untuk menerima skema baru. Skema Roni tidak berfungsi dengan baik dalam mengintergrasikan skema-skema yang sudah ada, sehingga terjadi ketidakterhubungan beberapa skema yang telah dimiliki.Ada banyak faktor ang membuat fungsi skema tidak dapat bekerja, diantaranya banyaknya materi yang dipelajari, waktu yang disediakan terbatas. Bagan 5 berikut memberikan ilustrasi ketidakterhubungan skema Roni ketika berupaya mengonstruksi bukti matematis.

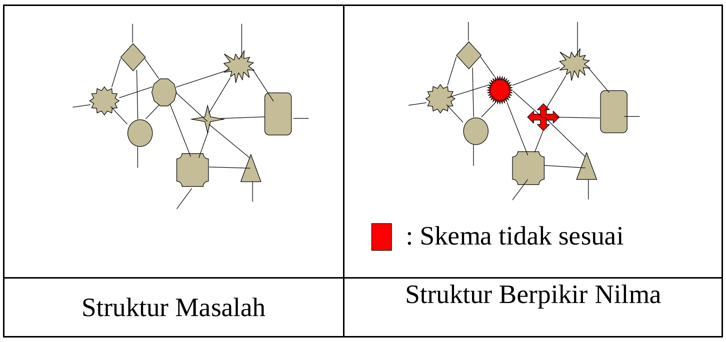
	 : Skema yang tidak terhubung
Struktur Masalah	Struktur Berpikir Roni

Bagan 5.Ilustrasi ketidakterhubungan Skema

3.4. Ketidaksesuaian Skema

Paparan ketidaksesuaian skema dideskripsikan berdasarkan hasil konstruksi bukti matematis mahasiswa yang bernama Nilma (bukan nama sebenarnya). Ketidaksesuaian skema terlihat saat Nilma melakukan proses asimilasi ketika berhadapan dengan kata fungsi kontinu. Nilma memaknai kontinu itu sebagai bukan diskontinu. Fungsi diskontinu diinterpretasi Nilma sebagai fungsi yang tidak punya nilai fungsi. Hasil interpretasi itu berlanjut ketika Nilma memaknai fungsi kontinu. Nilma memaknai fungsi kontinu sebagai fungsi yang nilai fungsinya harus ada. Akibatnya, Nilma memaknai definisi f dan g kontinu di titik a adalah nilai $f(a)$ dan nilai $g(a)$ harus ada. Ketika dikonfirmasi ulang, kenapa dia memiliki skema yang demikian, Nilma menyatakan bahwa dia terbiasa mengkotak-kotakkan materi pelajaran, jadi selesai mempelajari satu materi pelajaran langsung diputus dan melanjutkan materi baru tanpa mengaitkan dengan materi sebelumnya.Walaupun Nilma memiliki skema yang benar tentang konsep penjumlahan pada limit dan konsep penjumlahan fungsi, tetapi karena diterapkan dengan konsep kontinu yang salah maka kesalahannya terus berlanjut.

Jika dikaitkan dengan teori kesalahan konstruksi konsep dalam pemecahan masalah oleh [18], [19] yang menyatakan bahwa ada 5 bentuk kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep matematis,yaitu (1) *Pseudo-construction*, (2) Lubang konstruksi, (3) *Mis-analogical construction*, (4) *Mis*-connection, dan (4) *Mis-logical construction*. Diduga skema yang dimiliki Nilma termasuk bentuk kesalahan *Mis-logical construction.*Nilma berpikir bahwa jika f fungsi kontinu di titik a maka fungsi f tidak putus di titik a. Nilma membangun implikasi berdasarkan pemaknaan terhadap kata diskontinu di *titik a yang* diartikan putus.Nilma tidak bisa mengonstruk bahwa putus itu tidak selalu tidak ada nilai fungsi di titik a. Putus bisa memiliki nilai fungsi tetapi nilainya tidak memenuhi fungsi *f*.Sehingga berakibat kata tidak putus oleh S4 diartikan harus adanya nilai $f(a)$. Berikut bagan 6 yang menunjukan kondisi skema salah yang digunakan mahasiswa ketika berupaya mengonstruksi bukti matematis.



Gambar5. Ilustrasi Ketidaksesuaian Skema

3.5. Ketidakmatangan Skema.

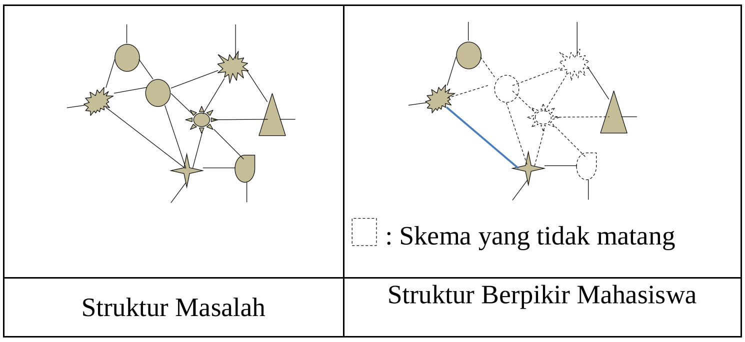
Temuan jenis ini dipaparkan berdasarkan hasil kerja Budi (bukan nama sebenarnya) dalam mengonstruksi bukti matematis. Ketidakmatangan skema terlihat ketika Budi melakukan proses akomodasi dalam memaknai masalah pembuktian. Setelah membaca masalah pembuktian Budi langsung teringat teorema yang sama dengan masalah pembuktian, seperti yang diungkapkan dalam think aloudnya berikut ini.*Jika f dan g itu memiliki turunana pada a dan limitnya itu ada maka f plus g itu pasti kontinu pada a.* Teorema yang diungkapkan Budi menunjukan kualitas skema yang dimilikinya. Skema Budi tentang teorema tersebut hampir benarnya. Namun, terlihat jelas skema yang dimilikinya tercampur dengan skema tentang turunan, artinya skema yang dimiliki mahasiswa tersebut belum matang, belum tegas. Hal ini dipertegas oleh data hasil wawancara, ketika mengonfirmasi uangkapan Budi. seperti kutipan wawancara beriku.

P: (memutar ulang video, terlihat adengan budi mengatakan "ada teorema yang berbunyi"..) Teorama apa yang kamu maksud ..?
S5 : Teorem ini..(sambil menunjuk Masalah pembuktian)
P: Oo kamu ingat teorema f + g kontinu ini yang ada disoal ini?
S5 : Ya, kan ada untuk f – g , f bagi g, pakai syarat g tidak boleh sama dengan nol, buk.
P: Ooo kamu ingat lengkap begitu, ya?
S5: Iya tapi tidak bisa...mengerjakannyahe he..
P: Tapi di rekaman tadi kamu menyebut ada kata turunannya?
S5 : O ya,Kan sebelum materi kekontinuan ini ada materi limit dan turunan
P: O begitu, kamu yakin, urutannya begitu? Mana yang duluan dipelajari?
S5 : Turuan dulu baru limit, buk.

P: Oo begitu, ya?
S5 : Kan kalau limit kiri sama dengan limit kanan itu berarti dia punya turunana, buk.
P: mm, trus..?
S5 : Di fungsi kontinu itukan ada fungsi kontinu di satu sisi.
P:mmm..
S5 : Fungsi kontinu yang limitnya dari kanan, dan fungsi kontinu yang limitnya dari kirim
P:mm
S5 : Ya saya mencoba mengaitkan dengan turunan
P: Ooo, kamu mencoba mengaitkan
S5 : iya, buk.
P: Tapi tidak berhasil
S5 : he he tidak buk.

Selesai mengucapkan teorema, pikiran Budi langsung terkoneksi dengan definisi fungsi kontinu.Budi mengungkapkan dan menuliskan 3 persyaratan definisi fungsi $f$kontinu di a, yaitu (1) nilai $f(a)$ada /terdefinisi, (2) $\lim_{x\to 0} f(x)$ ada, dan (3) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(a)$. Definisi yang ditulis Budi sudah lengkap tetapi penulisan tidak tepat.Hal ini menunjukan bahwa skema Budi tentang definisi fungsi kontinu juga belum matang.Gagal memanfaatkan skema tentang definisi kontinu Budi beralih ke definisi dasar fungsi kontinu. Budi menamai definisi dasar fungsi kontinu tersebut sebagai definisi matematis.

Dalam hal ini, Budi memiliki hampir semua skema berkenaan dengan kekontinuan tetapi skema yang dimiliki tidak ada yang utuh. Hal ini ditandai dengan penulisan yang tidak sesuai, satu konsep tercampurtercampur dengan konsep laniya. Budi juga tidak bisa memanfaatkan skema yang dimilikinya. Hal ini sesuai dengan teori kegagalan konstruksi dari [25] yang menyatakan bahwa konstruksi pengetahuan tidak selalu benar. Ada 5 bentuk kesalahan konstruksi, yaitu (1) *pseudo-construction*, (2) lubang konstruksi, (3) *mis-analogical construction*, (4) *mis-connection*, dan (5) *mis-logical construction*. Budi sehingga skema yang dimiliki tidak sempurna.Bagan7. berikut memberikan ilustrasiketidakmatangan skema.



Bagan 7. IlustrasiKetidakmatangan Skema

4. KESIMPULAN

Berdasarkan temuan dan paparan analisis yang diuraikn di atas dapat disimpulkan bahwa konstruksi skema mahasiswa saat berupaya mengonstruksi bukti matematis sangat beragam. Ada 5 bentuk konstruksi skema mahasiswa saat mengonstruksi bukti matematis, yaitu (1) Kelengkapan skema, (2) Ketidaklengkapan skema, (3) Ketidakterhubungan skema, (4) Ketidaksesuaian skema dan (5) Ketidakmatangan skema.

Katogori 2 sampai 5 merupakan kategori yang terjadi pada mahasiswa dengan hasil konstruksi buktinya tidak valid. Sesuai dengan pembahasan di atas dapat ditarik kesimpulan bahwa kondisi skema yang demikian disebabkan proses konstruksi skema sebelumnya yang kurang baik yang menyebabkan fungsi skema tidak berjalan sebagaimana yang dinyatakan oleh [2]. Perbaikan kemampuan konstruksi bukti matematis mahasiswa tidak cukup hanya dengan mengajarkan bagaimana cara mengonstruksi bukti tapi lebih kepada memastikan setiap skema pegetahuan tentang konsep dan prinsip matematika terbentuk dengan baik dan sempurna. Perbaikan pengajaran secara menyeluruh diharapkan dapat mempertegas dan mematangkan skema mahasiswa.

ACKNOWLEDGEMENTS

Penelitian ini didanai oleh dikti dalam program Hibah disertasi doktor tahun anggaran 2017, surat kontrak nomor 081-20/LPPM-Penelitian/Hatta/IV-2017.

REFERENSI

[1] Arsyat, A. 2015. Fungsi Kontinu dan Turunan (Online) www.academia.edu/9129048/Fungsi_Kontinu_dan_turunan_1_ diakses 15 September 2016.
[2] Arbib, A. M. 1990. A Piagetian Perspective on Mathematical Construction. Synthesis. July 1990, Volume 84, Issue 1, pp 43–58 doi:10.1007/BF00485006
[3] Creswell, J.W. 2012. Educational Research: Planning, Conducting and Evaluating Quantitative and Qualitatitive Research, Fourth edition , Boston, Amsterdam , Delhi. Pearson.
[4] Dreyfus, T. 1999. Why Johnny Can`t Prove (with apologies to Morris Kline) Educational Studies in Mathematics.vol. 38. pp. 85-109 DOI: 10.1023/A:1003660018579
[5] Gholamazad, S., Liljedahl, P., & Zazkis, R. 2003. One Line Proof: What can Go Wrong? dalam Pateman, N., (Eds) Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, pp. 437-444. Honolulu. HI.
[6] Harel & Sowder. 1998. Harel, G., Sowder. L. 1998. Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies. In E. Dubinsky, A. H. Soenfeld and J.J. Kaput (eds), Issues in mathematics education: Vol.7. Research in collegiate mathematics education, III, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 234-283
[7] Heinze, A & Reiss, K. 2004. Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. Procceding of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education 28 February-3 March 2003. Thematic Group 4.
[8] Kaasila, R & Pehkonen, E & Hellinen, A. 2009. Finnish pre-service teachers' and upper secondary students' understanding of division and reasoning strategies used Published online: 16 September 2009 Springer Science + Business Media B.V. Educ Stud Math 73:247–261 DOI 10.1007/s10649-009-9213-1
[9] Netti, S. Nusantara, T., Subanji, Abadyo&Anwar, L. 2016. The Failure to Construct Proof Based on Assimilation and Accommodation Framework from Piaget. International Education Studies; Vol. 9, No. 12; 2016
[10] Selden, A.& Selden, J .2009. Understanding the Proof Construction Process. artikel http://www.researchgate.net/publication/268630244diakses 20 November 2015
[11] Selden, A.& Selden, J. 1995. Unpacking the Logic of Mathematical Statements. Educational Studies in Mathematics 29; 123-151. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.
[12] Selden, A.& Selden, J. 1987. Errors and Misconception in College level Theorema Proving. in Novak, D. J (Eds) Proccedings of the Second International seminar on Misconception and Educational Strategies In Science and Mathematics. Vol III. Cornell University. July p. 457-470.
[13] Selden, A. & Selden, J. 2008. Overcoming students' difficulties in learning to understand and construct proofs. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics (pp.95-110). Washington, DC: Mathematical Association of America.
[14] Selden, J., Benkhalti, A & Annie Selden. 2014. An Analysis Of Transition-To-Proof Course Students' Proof Constructions With A View Towards Course Redesign(online):https://www.researchgate.net/publication/268278836. Diakses Desember 2016.
[15] Selden, A. & Selden, J. 2015. A Theoretical Perspective for Proof Construction. CERME 9 Proceeding. (didownload melalui www.researchgate.net tanggal 12 Pembuari 2016.
[16] Subanji & Nusantara, T. 2015. Teori Konstruksi Konsep dan Pemecahan Masalah Matematika. Malang. UM Press
[17] Subanji & Nusantara, T. 2017. Teori Defragmentasi Struktur Berpikir dalam Mengonstruksi Konsep dan Pemecahan Masalah Matematika. Malang.UM Press.
[18] Skemp, R. Richard. 1982. The Psychology of Learning Mathematics. Great Britain. Harell Watson & Vinely Ltd.
[19] Stylianides, Gabriel J. & Stylianides, Andreas J. 2009. Ability to Construct Proofs and Evaluate One's Own Constructions in Fou-Lai Lin, Feng-Jui Hsieh Gila Hanna, Michael de Villiers (Eds) Proceeding ICMI 19th The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei, Taiwan. 2-166
[20] Stemberg, R.J & Stenberg, K. 2012. Cognitive Psychology. Sixth edition. Wadsworth, Cengage Learning.
[21] Tabach, M & Levenson, E & Barkai, R & Tsamir, P. Tirosh, D & Dreyfus, T 2009. Teachers' Knowledge of Students' Correct and IncorrectProof Constructions in Fou-Lai Lin, Feng-Jui Hsieh Gila Hanna, Michael de Villiers (Eds) Proceeding ICMI 19th The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taipei, Taiwan.
[22] Tall. D. 2002. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. Dalam Tall. D (Ed), Advanced Mathematical Thinking (hlm. 4-20). New York: Kluwer Academic Publishers
[23] Weber, K. 2004. A Framework for Describing the Processes that Undergraduates Use to Construct Proofs. Proccedings of the 28th Confrence of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol 4. pp. 425-432.
[24] Weber, K. 2001. Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge. Educational Studies in Mathematics, 48, 101-119.
[25] Weber, K. 2006 . Investigating and teaching the processes used to construct proofs. In F. Hitt, G. Harel & S. Hauk (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education. VI (pp.197-232). Providence: RI: American Mathematical Society. DOI: 10.1090/cbmath/013/07