Prosiding SI MaNIs (Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami)
Vol.1, No.1, Juli 2017, Hal. 476-483
p-ISSN: 2580-4596; e-ISSN: 2580-460X

Suatu Ukuran Bernilai $C[a,b]$

Firdaus Ubaidillah
Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember
firdaus_u@yahoo.com

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 15 Mei 2017
Direvisi: 1 Juni 2017
Diterbitkan: 31 Juli 2017

Keyword:

Ukuran luar
Ukuran
Himpunan terukur
Ruang ukuran

ABSTRACT

Dalam paper ini dikonstruksi suatu ukuran bernilai $C[a,b]$, dimana $C[a,b]$ adalah koleksi semua fungsi kontinu bernilai real yang terdefinisi pada selang tertutup dan terbatas $[a,b]$. Dalam mengkonstruksi ukuran bernilai $C[a,b]$ tersebut, terlebih dahulu dikonstruksi ukuran luar bernilai $C[a,b]$. Kemudian membangkitkan ukuran melalui ukuran luar tersebut. Beberapa sifat sederhana yang berkaitan dengan ukuran bernilai $C[a,b]$ juga akan dibahas dalam paper ini.

Corresponding Author:

Firdaus Ubaidillah,
Jurusan Matematika Fakultas MIPA,
Universitas Jember,
Jl. Kalimantan 37 Jember, Jawa Timur, Indonesia 68121
Email:firdaus_u@yahoo.com

1. PENDAHULUAN

Salah satu bagian dalam bidang matematika yang terus berkembang adalah matematika analisis. Terkadang dalam pengembangan tersebut, diperlukan perluasan definisi, seperti definisi ukuran yang sudah dikenal selama ini bernilai real, untuk keperluan tertentu. Sebagai contoh, Boccuto, Riecan, dan Vrabelova [2] dalam mendefinisikan jumlah Riemann (*Riemann sum*) fungsi $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{R}$, dengan $\boldsymbol{R}$ ruang Riesz, adalah

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{D})=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_i)\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{E}_i)$$

dengan $\boldsymbol{D}=\{(\boldsymbol{E}_i,\boldsymbol{t}_i),\boldsymbol{i}=\mathbf{1},\mathbf{2},\dots,\boldsymbol{n}\}$ partisi $\boldsymbol{\delta}$-fine atas $\boldsymbol{T}$ dan $\boldsymbol{\mu}$ ukuran bernilai Riesz $\boldsymbol{R}$, yakni $\boldsymbol{\mu}:\boldsymbol{\Sigma}\to\boldsymbol{R}$ dengan $\boldsymbol{\Sigma}$ merupakan aljabar-$\boldsymbol{\sigma}$ atas semua himpunan bagian Borel dari $\boldsymbol{T}$. Dalam definisinya, mereka berasumsi bahwa $\boldsymbol{R}$ ruang Riesz lengkap Dedekind. Sekarang, jika diambil $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ ruang atas semua fungsi kontinu bernilai real yang terdefinisi pada selang tertutup dan terbatas $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ yang merupakan ruang Riesz yang tidak lengkap Dedekind, ini menarik untuk membahasnya karena $\boldsymbol{\mu}$ menjadi ukuran bernilai $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. Sebelumnya, Ghoussoub [3] telah membahas ukuran bernilai ruang Riesz, bahkan lebih awal lagi, Wright [7] juga telah membahas ukuran bernilai ruang terurut parsial.

Tahun 2014, Ubaidillah dkk [5] telah membahas suatu ukuran bernilai $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, namun definisi ukuran tersebut masih pada koleksi tertentu saja dan belum pada himpunan kuasanya. Hasil ukuran tersebut kemudian digunakan Ubaidillah dkk [6] untuk mengkonstruksi integral Henstock-Kurzweil di dalam ruang $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. Tujuan dari tulisan ini adalah mengkonstruksi suatu ukuran bernilai $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ yang terdefinisi pada himpunan kuasa $\mathbf{2}^{\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}$ dengan melalui ukuran luar. Dalam tulisan ini, terlebih dahulu dikonstruksikan suatu ukuran luar pada $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ kemudian membangkitkan ukuran melalui ukuran luar tersebut dengan membatasi pada aljabar-

$\boldsymbol{\sigma}$nya saja. Beberapa sifat ukuran bernilai $\boldsymbol{C[a,b]}$ juga akan dibahas dalam tulisan ini.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam seksi ini akan dikonstruksi suatu ukuran bernilai $\boldsymbol{C[a,b]}$ dengan terlebih dahulu mengkonstruksi ukuran luar. Untuk keperluan hal-hal tersebut, diperlukan perluasan sistem $\boldsymbol{C[a,b]}$ dan pengertian aljabar-$\boldsymbol{\sigma}$ himpunan pada $\boldsymbol{C[a,b]}$. Perluasan sistem $\boldsymbol{C[a,b]}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{\bar{C}[a,b] = C[a,b]} \cup \{-\infty, \infty\}$$

yang disebut dengan **sistem $\boldsymbol{C[a,b]}$ yang diperluas**. Elemen $\boldsymbol{r,s} \in \boldsymbol{\bar{C}[a,b]}$ dengan $\boldsymbol{r} = \infty$ dan $\boldsymbol{s} = -\infty$ mempunyai arti berturut-turut $\boldsymbol{r(x)} = \infty$ dan $\boldsymbol{s(x)} = -\infty$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{[a,b]}$. Operasi-operasi aljabar antara simbol $\pm\infty$ dan elemen $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C[a,b]}$ sebagai berikut

(i). $-\infty < \boldsymbol{f} < \infty$ untuk setiap $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C[a,b]}$
(ii). $\boldsymbol{f} + \infty = \infty$ dan $\boldsymbol{f} - \infty = -\infty$ untuk setiap $\boldsymbol{C[a,b]}$
(iii). $\boldsymbol{f} \cdot \infty = \infty$ dan $\boldsymbol{f} \cdot (-\infty) = -\infty$ untuk setiap $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C[a,b]}$ dengan $\boldsymbol{f} > \boldsymbol{\theta}$
(iv). $\boldsymbol{f} \cdot \infty = -\infty$ dan $\boldsymbol{f} \cdot (-\infty) = \infty$ untuk setiap $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C[a,b]}$ dengan $\boldsymbol{f} < \boldsymbol{\theta}$
(v). $\infty + \infty = \infty$ dan $-\infty + (-\infty) = -\infty$, dan
(vi). $\boldsymbol{\theta} \cdot \infty = \boldsymbol{0} \cdot (-\infty) = \boldsymbol{\theta}$

Selanjutnya, diberikan pengertian aljabar-$\boldsymbol{\sigma}$ himpunan yang diambilkan dari [1].

Definisi 1. Diberikan himpunan $\boldsymbol{X} \neq \emptyset$. Koleksi $\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \boldsymbol{2^X}$ yang mempunyai sifat-sifat

(i). $\emptyset \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$
(ii). $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{A^C} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$
(iii). $\{\boldsymbol{A_n}\} \in \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \bigcup_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{A_n} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$

disebut **aljabar-$\boldsymbol{\sigma}$ himpunan** pada $\boldsymbol{X}$.

Pasangan $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ aljabar-$\boldsymbol{\sigma}$ himpunan padanya, $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$, disebut **ruang terukur** dan setiap anggota dari ruang terukur disebut **himpunan terukur**. Beberapa sifat aljabar-$\boldsymbol{\sigma}$ himpunan diberikan dalam dua teorema berikut yang buktinya dapat dilihat di [4].

Teorema 2. Jika $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ aljabar-$\boldsymbol{\sigma}$ himpunan pada $\boldsymbol{X}$, maka
(i). $\boldsymbol{A,B} \in \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$
(ii). $\boldsymbol{A,B} \in \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$
(iii). $\boldsymbol{A,B} \in \boldsymbol{\mathcal{A}} \Rightarrow (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}) \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Teorema 3. Jika $(X, \mathcal{A})$ ruang terukur dan $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ maka terdapat $\{B_n\} \subseteq \mathcal{A}$ sehingga $B_i \cap B_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$ dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

2.1. Ukuran Luar

Dalam subseksi ini akan dikonstruksi ukuran luar dan aljabar-σ himpunan pada $C[a,b]$ yang dibangkitkan melalui ukuran luar pada $C[a,b]$. Untuk mengawali hal itu, diberikan pengertian ukuran luar pada $C[a,b]$.

Definisi 4. Fungsi himpunan $\mu^*: 2^{C[a,b]} \to \bar{C}[a,b]$ yang memenuhi sifat-sifat

(i). $\boldsymbol{\mu^*(A) \geq \theta}$, untuk setiap $\boldsymbol{A \subseteq C[a,b]}$
$\mu^*(\emptyset) = \theta$
(ii). $A, B \subseteq C[a,b]$ dan $A \leq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
(iii). $\{A_n\} \subseteq C[a,b] \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

disebut **ukuran luar** pada $C[a,b]$.

Untuk $f, g \in C[a,b]$, selang-selang terbuka di dalam $C[a,b]$ dinyatakan dengan $(f,\infty), (-\infty, f), (f,g)$ asalkan $f < g$, atau $C[a,b]$ sendiri, dan koleksi semua selang terbuka di dalam $C[a,b]$ dan himpunan kosong dinyatakan oleh $\mathcal{J}$. Jika $I, J \in \mathcal{J}$, mudah dipahami bahwa $I \cap J \in \mathcal{J}$ dan jika $I \cap J \neq \emptyset$ maka $I \cup J \in \mathcal{J}$. Selanjutnya, jika $f, g \in C[a,b]$ dengan $f < g$, didefinisikan fungsi $\ell: \mathcal{J} \to \bar{C}[a,b]$ dengan

$$\ell(I) = \begin{cases} \theta & \text{, jika } I = \emptyset \\ g - f & \text{, jika } I = (f,g) \\ \infty & \text{, jika } I = (f,\infty), I = (-\infty, f) \text{atau } I = C[a,b] \end{cases}$$

Diperhatikan bahwa $\ell(I)$ senantiasa ada di dalam $\bar{C}[a,b]$ dan $\ell(I) \geq \theta$ untuk setiap $I \in \mathcal{J}$. Untuk selanjutnya, koleksi semua $\{I_n\} \subseteq \mathcal{J}$ sehingga $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ dinyatakan dengan $\mathcal{P}(A)$. Diperhatikan bahwa, untuk setiap $E \subseteq A$ berlaku $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(E)$.

Lemma 5. Jika $I, J \in \mathcal{J}$ dan $I \cap J \neq \emptyset$, maka

$$\ell(I \cup J) + \ell(I \cap J) = \ell(I) + \ell(J).$$

Bukti: Anggap $I = (f_1, g_1)$ dan $J = (f_2, g_2)$ dengan $f_1 < g_1$, $f_2 < g_2$, dan $f_1 < f_2$. Karena $I \cap J \neq \emptyset$, maka diperoleh $I \cap J = (f_2, g_1)$ dan $I \cup J = (f_1, g_2)$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\ell(I \cup J) + \ell(I \cap J) = (g_2 - f_1) + (g_1 - f_2) = (g_1 - f_1) + (g_2 - f_2) = \ell(I) + \ell(J). \qquad \blacksquare$$

Selanjutnya didefiniskan pemetaan $\bar{\mu}: 2^{C[a,b]} \to C[a,b]$ dengan

$$\bar{\mu}(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : \{I_n\} \in \mathcal{P}(A)\right\}, \text{ untuk setiap } A \subseteq C[a,b]$$

asalkan infimum tersebut ada.
Koleksi semua $A \subseteq C[a,b]$ sehingga $\bar{\mu}(A)$ ada dinyatakan dengan $\mathcal{M}[a,b]$.

Lemma 6. Diberikan $A, B \subseteq C[a,b]$ dengan $A \subseteq B$. Jika $A, B \in \mathcal{M}[a,b]$, maka $\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B)$.

Bukti: Diberikan $A, B \in \mathcal{M}[a,b]$. Karena $A \subseteq B$, diperoleh

$$\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A).$$

Oleh karena itu diperoleh

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : \{I_n\} \in \mathcal{P}(B)\right\} \subseteq \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : \{I_n\} \in \mathcal{P}(A)\right\} \tag{1}$$

Karena $A, B \in \mathcal{M}[a,b]$, maka kedua himpunan pada ruas kiri dan kanan (1) mempunyai infimum dan diperoleh

$$\bar{\mu}(A) = inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : \{I_n\} \in \mathcal{P}(A)\right\} \leq inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : \{I_n\} \in \mathcal{P}(B)\right\} = \bar{\mu}(B). \qquad \blacksquare$$

Jika $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, maka untuk setiap bilangan $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ terdapat $\{\boldsymbol{I_n}\} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{A})$ sehingga berlaku

$$\bar{\mu}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq \bar{\mu}(B) + \varepsilon e\,,$$

dan berlaku sebaliknya.

Teorema 7. Diberikan $A, B \subseteq C[a,b]$. Jika $A, B \in \mathcal{M}[a,b]$, maka $A \cup B \in \mathcal{M}[a,b]$.

Bukti: Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\{I_n\} \in \mathcal{P}(A)$ sehingga berlaku

$$\bar{\mu}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq \bar{\mu}(A) + \frac{\varepsilon e}{2}$$

dan terdapat $\{J_n\} \in \mathcal{P}(B)$ sehingga berlaku

$$\bar{\mu}(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \leq \bar{\mu}(B) + \frac{\varepsilon e}{2}.$$

Jika $\{I_n \cup J_n\}$ dinyatakan sebagai $\{D_m\} \subseteq \mathcal{J}$, maka $\{D_m\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ dan berdasarkan Lemma 5, diperoleh

$$\bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) < \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) + \varepsilon e$$

atau

$$\bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \ell(D_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n \cap J_n) < \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) + \varepsilon e\,.$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) - \bar{\mu}(A \cap B) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \ell(D_m) < \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) - \bar{\mu}(A \cap B) + \varepsilon e\,. \qquad \blacksquare$$

Sebagai akibat dari Teorema 7, diperoleh hasil berikut.

Akibat 8. Diberikan $A_i \in C[a,b]$ untuk setiap $i = 1,2,\dots,n$. Jika $A_i \in \mathcal{M}[a,b]$ untuk setiap $i = 1,2,\dots,n$, maka $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{M}[a,b]$.

Lemma 9. Jika $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}[a,b]$ dengan $\bar{\mu}(A_n) = \theta$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}[a,b]$ dan $\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \theta$.

Bukti: Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan setiap $n \in \mathbb{N}$, diambil $\{I_k^n\} \in \mathcal{P}(A_n)$ sehingga berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k^n) < \frac{\varepsilon e}{2^n}.$$

Jika $\{I_k^n\}$ dinyatakan dengan sebagai $\{D_m\} \subseteq \mathcal{J}$, maka $\{D_m\} \in \mathcal{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ dan diperoleh

$$\theta \leq \sum_{m=1}^{\infty} \ell(D_m) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon e}{2^n} = \varepsilon e\,.$$

Jadi, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}[a,b]$ dan $\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \theta$.

Lemma 10. Diberikan $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}[a,b]$. Jika $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}[a,b]$, maka

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n)$$

Bukti: Diambil $A \in \mathcal{M}[a,b]$ dan $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}[a,b]$ sehingga $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan setiap $n \in \mathbb{N}$, diambil $\{B_k^n\} \subseteq \mathcal{J}$ sehingga berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(B_k^n) < \frac{\varepsilon e}{2^n} + \bar{\mu}(A_n).$$

Jika $\{B_k^n\}$ dinyatakan dengan sebagai $\{D_m\} \subseteq \mathcal{J}$, maka $A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$ dan diperoleh

$$\bar{\mu}(A) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \ell(D_m) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \ell(B_k^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon e}{2^n} + \bar{\mu}(A_n)\right) = \varepsilon e + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n).$$ ∎

Selanjutnya, dibentuk koleksi-koleksi himpunan

$$\mathcal{M}_1[a,b] = \{X \subseteq C[a,b] : X \notin \mathcal{M}[a,b], \text{terdapat } Y \in \mathcal{M}[a,b] \text{ dengan } X \subseteq Y \text{ dan } \bar{\mu}(Y) = \theta\}$$
$$\mathcal{M}_2[a,b] = \{X \subseteq C[a,b] : X \notin \mathcal{M}[a,b] \text{ terdapat } Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}[a,b] \text{ dengan } Y_1 \subseteq X \subseteq Y_2 \text{ dan } \theta < \bar{\mu}(Y_i) < \infty, i = 1,2\}$$
$$\mathcal{M}_3[a,b] = \{X \subseteq C[a,b] : X \notin \mathcal{M}[a,b], X \notin \mathcal{M}_1[a,b], X \notin \mathcal{M}_2[a,b]\}$$

dan didefinisikan fungsi $\mu^* : 2^{C[a,b]} \to \bar{C}[a,b]$ dengan

$$\mu^*(A) = \begin{cases} \theta, & A \in \mathcal{M}_1[a,b] \\ \bar{\mu}(A), & A \in \mathcal{M}[a,b] \\ \bar{\mu}(B), & A \in \mathcal{M}_2[a,b] \text{ dengan } A \subseteq B \in \mathcal{M}[a,b] \text{ dan } \mu^*(B - A) = \theta \\ \infty, & A \in \mathcal{M}_3[a,b] \end{cases} \tag{2}$$

Akan ditunjukkan $C[a,b]$ *well-defined*.
Diperhatikan bahwa $\mathcal{M}_i[a,b] \cap \mathcal{M}_j[a,b] = \emptyset$ untuk setiap $i,j = 1,2,3$ dan $i \neq j$ dan $\mathcal{M}_i[a,b] \cap \mathcal{M}[a,b] = \emptyset$ untuk setiap $i,j = 1,2,3$.
Dari koleksi $\mathcal{M}_3[a,b]$, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3[a,b] &= (\mathcal{M}[a,b])^C \cap (\mathcal{M}_1[a,b])^C \cap (\mathcal{M}_2[a,b])^C \\ &= (\mathcal{M}[a,b] \cup \mathcal{M}_1[a,b] \cup \mathcal{M}_2[a,b])^C \\ (\mathcal{M}_3[a,b])^C &= \mathcal{M}[a,b] \cup \mathcal{M}_1[a,b] \cup \mathcal{M}_2[a,b] \end{aligned}$$

Teorema 11. Diberikan $A, B \subseteq C[a,b]$. Jika $A \subseteq B$, maka $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Bukti: Akan dibuktikan per kasus.
Kasus $\mu^*(B) = \infty$. Cukup jelas berlaku $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
Kasus $\mu^*(B) = \theta$. Ini berakibat $A \in \mathcal{M}[a,b]$ atau $A \in \mathcal{M}_1[a,b]$ dan $\mu^*(A) = \theta$. Dengan menggunakan Lemma 6, diperoleh $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
Kasus $\theta < \mu^*(B) < \infty$. Ini berakibat $B \in \mathcal{M}[a,b]$ atau $B \in \mathcal{M}_2[a,b]$. Dengan menggunakan Lemma 6, diperoleh $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Bukti telah lengkap. ∎

Lemma 12. Diberikan $A, B \subseteq C[a,b]$. Jika $A \in \mathcal{M}[a,b]$ dan $\mu^*(B) = \theta$, maka $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A)$

Teorema 13. Jika $\{A_n\} \subseteq C[a,b]$, maka

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Bukti: Ambil sebarang $\{A_n\} \subseteq C[a,b]$. Jika terdapat A_n sehingga $\mu^*(A_n) = \infty$, bukti selesai.
Selanjutnya, dianggap $\mu^*(A_n) < \infty$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Dibentuk himpunan-himpunan

$$I \;= \{n \in \mathbb{N}: A_n \in \mathcal{M}[a,b]\}$$
$$I_1 = \{n \in \mathbb{N}: A_n \in \mathcal{M}_1[a,b]\}$$
$$I_2 = \{n \in \mathbb{N}: A_n \in \mathcal{M}_2[a,b]\}$$

Untuk setiap $n \in I_1$, terdapat $X_n \in \mathcal{M}[a,b]$ dengan $A_n \subseteq X_n$ dan $\bar{\mu}(X_n) = \theta$.
Untuk setiap $n \in I_2$, terdapat $Y_n \in \mathcal{M}[a,b]$ dengan $A_n \subseteq Y_n$ dan $\mu^*(Y_n - A_n) = \theta$.
Oleh karena itu, diperoleh hubungan

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &= \bigcup_{n\in I} A_n \cup \bigcup_{n\in I_1} A_n \cup \bigcup_{n\in I_2} A_n \\ &\subseteq \bigcup_{n\in I} A_n \cup \bigcup_{n\in I_1} X_n \cup \bigcup_{n\in I_2} Y_n \,.\end{aligned}$$

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \theta$, maka $\mu^*(A_n) = \theta$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya $I_2 = \emptyset$. Karena $\bar{\mu}(A_n) = \theta = \bar{\mu}(X_n)$ untuk setiap $n \in I \cup I_1$, berdasar Lemma 9, diperoleh

$$\bigcup_{n\in I} A_n \cup \bigcup_{n\in I_1} X_n \in \mathcal{M}[a,b]$$

dan

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n\in I} A_n \cup \bigcup_{n\in I_1} X_n\right) = \theta \,.$$

Berdasarkan Teorema 11, diperoleh

$$\theta \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n\in I} A_n \cup \bigcup_{n\in I_1} X_n\right) = \bar{\mu}\left(\bigcup_{n\in I} A_n \cup \bigcup_{n\in I_1} X_n\right) = \theta \,.$$

Jika $\theta < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \infty$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sehingga $\sum_{n=K+1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \varepsilon e$. Oleh karena itu, berdasar Teorema 11, Lemma 12 dan Akibat 8, diperoleh

$$\begin{aligned}\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{K} A_n \cup \bigcup_{n=K+1}^{\infty} A_n\right) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{K} A_n\right) \\ &\leq \mu^*\left(\bigcup_{n\in I} A_n \cup \bigcup_{n\in I_2} Y_n\right) = \bar{\mu}\left(\bigcup_{n\in I} A_n \cup \bigcup_{n\in I_2} Y_n\right) \\ &\leq \sum_{n\in I} \bar{\mu}(A_n) + \sum_{n\in I_2} \bar{\mu}(Y_n) \\ &= \sum_{n\in I} \mu^*\,(A_n) + \sum_{n\in I_2} \mu^*\,(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{K} \mu^*\,(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\,(A_n).\end{aligned}$$

Bukti telah lengkap. ■

Teorema 14. Fungsi μ^* yang didefinisikan pada (2) merupakan ukuran luar pada $C[a,b]$.

Bukti : Akan dibuktikan μ^* memenuhi sifat-sifat di dalam Definisi 4.
Pertama, akan dibuktikan $\mu^*(A) \geq \theta$ untuk setiap $A \in 2^{C[a,b]}$ dan $\mu^*(\emptyset) = \theta$.
Karena $\bar{\mu}(A) \geq \theta$ untuk setiap $A \in \mathcal{M}[a,b]$ dan berdasarkan definisi μ^* pada (2), diperoleh $\mu^*(A) \geq \theta$ untuk setiap $A \in 2^{C[a,b]}$.
$\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$ dan $\ell(\emptyset) = \theta$, karena itu disimpulkan $\emptyset \in \mathcal{M}[a,b]$ dan $\mu^*(\emptyset) = \bar{\mu}(\emptyset) = \ell(\emptyset) = \theta$.
Selanjutnya, berdasarkan Teorema 11, diperoleh sifat setiap $A \subseteq B \subseteq C[a,b]$ berlaku $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
Untuk membuktikan sifat (iii) di dalam Definisi 4, berdasarkan Teorema 13, diperoleh untuk setiap $\{A_n\} \subseteq C[a,b]$ berlaku $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.
Jadi, μ^* merupakan ukuran luar pada $C[a,b]$. ■

Definisi 15. Himpunan $E \subseteq C[a,b]$ dikatakan **terukur-$\boldsymbol{\mu}^*$**, jika setiap $A \subseteq C[a,b]$ benar bahwa

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C).$$

Untuk setiap $A \subseteq C[a,b]$, benar bahwa $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^C)$, sehingga menurut sifat (iii) di dalam Definisi 4, diperoleh

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C).$$

Oleh karena itu diperoleh definisi baru sebagai berikut: himpunan $A \subseteq C[a,b]$ dikatakan terukur-μ^*, jika setiap $A \subseteq C[a,b]$ berlaku

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C).$$

Teorema 16. Jika $\mu^*(E) = \theta$, maka E terukur-μ^*.

Bukti: Untuk setiap $A \subseteq C[a,b]$, berlaku $A \cap E \subseteq E$ dan berdasarkan sifat (ii) Definisi 4, diperoleh $\theta \leq \mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = \theta$. Dengan kata lain $\mu^*(A \cap E) = \theta$.
Di sisi lain, $A \supseteq A \cap E^C$ sehingga diperoleh

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E^C) = \theta + \mu^*(A \cap E^C) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^C).$$ ■

Teorema 17. Pernyataan-pernyataan berikut bernilai benar
(i). θ dan $C[a,b]$ terukur-μ^*.
(ii). Jika $E \subseteq C[a,b]$ terukur-μ^*, maka E^C terukur-μ^*.
(iii). Jika $E_1, E_2 \subseteq C[a,b]$ terukur-μ^*, maka $E_1 \cup E_2$ dan $E_1 \cap E_2$ keduanya terukur-μ^*.

Berdasarkan Teorema 17, diperoleh akibat berikut

Akibat 18. Jika $E_1, E_2, \dots, E_n$ masing-masing himpunan terukur-μ^*, maka himpunan

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{dan} \quad \bigcap_{i=1}^{n} E_i$$

keduanya terukur-μ^*.

Teorema 19. Jika $E_1, E_2, \dots, E_n$ saling asing dan terukur-μ^*, maka untuk setiap $A \subseteq C[a,b]$ berlaku

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i).$$

Bukti: Akan dibuktikan dengan induksi matematika.
Jelas teorema benar untuk $n = 1$. Selanjutnya, anggap teorema benar untuk himpunan-himpunan $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$, yakni benar bahwa

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \mu^*(A \cap E_k),$$

untuk setiap $A \subseteq C[a,b]$.
Karena $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$ saling asing, dipunyai

$$A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \cap E_n = A \cap E_n$$

dan

$$A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \cap {E_n}^C = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right).$$

Karena E_n terukur-μ^*, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) &= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \cap E_n\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \cap {E_n}^C\right)\\ &= \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right)\right)\\ &= \mu^*(A \cap E_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu^*(A \cap E_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k).\end{aligned}$$ ■

Teorema 20. Jika $\{E_n\}$ barisan himpunan terukur-μ^*, maka himpunan

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{dan} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

keduanya terukur-μ^*.

Teorema 21. Untuk setiap $f \in C[a,b]$, selang-selang $(f,\infty), [f,\infty), (-\infty,f)$ dan $(-\infty,f]$ terukur-μ^*.

Akibat dari Teorema 21, maka setiap selang di dalam $C[a,b]$ terukur-μ^*.
Teorema berikut memperlihatkan bahwa koleksi semua himpunan terukur-μ^* pada $C[a,b]$ merupakan aljabar-σ pada $C[a,b]$.

Teorema 22. Jika $\mathcal{A}$ menyatakan koleksi semua himpunan terukur-μ^*, maka $\mathcal{A}$ merupakan aljabar-σ pada $C[a,b]$.

Bukti: Karena $\emptyset \in \mathcal{A}$, maka $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Berdasarkan Definisi 1, jika $E \in \mathcal{A}$ diperoleh $E^C \in \mathcal{A}$, dan berdasarkan Teorema 20, jika $E_i \in \mathcal{A}$ untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ maka $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$. ■

2.2. Ukuran

Dalam subseksi ini, akan dibangun suatu ukuran μ yang dibangkitkan oleh ukuran luar μ^* dan ruang ukuran pada $C[a,b]$. Sebelum itu, diberikan pengertian ukuran dan ukuran lengkap pada $C[a,b]$.

Definisi 23. Diberikan $\mathcal{A}$ aljabar-σ pada $C[a,b]$. Fungsi $\mu: \mathcal{A} \to \bar{C}[a,b]$ yang memenuhi sifat-sifat

(i). $\mu(A) \geq \theta$ untuk setiap $A \in \mathcal{A}$,
$\mu(\emptyset) = \theta$,
(ii). $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ dan $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ maka $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$,
disebut **ukuran** pada $C[a,b]$. Ruang terukur $C[a,b]$ yang dilengkapi dengan ukuran $C[a,b]$ padanya disebut **ruang ukuran** dan dituliskan dengan $(C[a,b],\mathcal{A},\mu)$. Ruang ukuran $(C[a,b],\mathcal{A},\mu)$dikatakan **lengkap** jika untuk setiap $A \in \mathcal{A}$ dengan $\mu(A) = \theta$ maka untuk setiap $E \subseteq A$ berakkibat $E \in \mathcal{A}$.

Suatu ruang ukuran dapat dibangkitkan melalui apa yang dinamakan dengan ukuran luar μ^* yang pengertiannya telah diberikan dalam Definisi 4. Teorema berikut menunjukkan terdapat suatu ruang ukuran lengkap pada $C[a,b]$.

Teorema 24. Diberikan $(C[a,b],\mathcal{A})$ ruang terukur. Fungsi $\mu: \mathcal{A} \to \bar{C}[a,b]$ dengan rumus

$$\mu(E) = \mu^*(E), \qquad \text{untuk setiap } E \in \mathcal{A}$$

adalah ukuran pada $(C[a,b],\mathcal{A})$. Lebih jauh, ruang ukuran $(C[a,b],\mathcal{A},\mu)$ lengkap.

Bukti: $\mu(E) = \mu^*(E) \geq \theta$ untuk setiap $E \in \mathcal{A}$ dan $\mu(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = \theta$. Jika $\{E_k\} \in \mathcal{A}$ dan saling-asing, berdasarkan Teorema 19 dengan mengambil $A = C[a,b]$, diperoleh

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(E_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k).$$

Selanjutnya, ambil sebarang $A \in \mathcal{A}$ dengan $\mu(A) = \theta$. Jadi $\mu^*(A) = \theta$. Akibatnya untuk setiap $E \subseteq A$, dengan sifat kemonotonan, diperoleh $\mu^*(E) = \theta$. Akibatnya, berdasarkan Teorema 16, E terukur-μ^*. Dengan Teorema 22, diperoleh $E \in \mathcal{A}$. ∎

Jika diperhatikan, ukuran μ adalah suatu fungsi himpunan yang diperoleh dengan cara membatasi ukuran luar μ^* pada aljabar-σ himpunan $\mathcal{A}$.

Sebagai akhir dari subseksi ini, diberikan beberapa sifat ukuran dalam satu teorema berikut.

Teorema 25. Diberikan $\{E_n\}$ barisan himpunan terukur.
(i). Jika $E_n \subseteq E_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

jika limitnya ada.
(ii). Jika $E_{n+1} \subseteq E_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

jika limitnya ada.

Bukti: Akan dibuktikan untuk bagian (i) saja, bagian (ii) serupa.
Jika $\mu(E_n) = \infty$ untuk suatu n, penyelesaian trivial.
Jika $\mu(E_n) < \infty$ untuk setiap n, dibentuk himpunan

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Karena $E_n \subseteq E_{n+1}$ untuk setiap n, himpunan-himpunan $E_{i+1} \backslash E_i$ dan $E_{j+1} \backslash E_j$ saling-asing untuk $i \neq j$. Oleh karena itu, berdasarkan bukti Teorema 24, diperoleh

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_{i+1} \backslash E_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\mu(E_{i+1}) - \mu(E_i)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).
\end{aligned}$$

∎

3. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh suatu kesimpulan bahwa terdapat suatu ukuran bernilai $C[a,b]$. Ukuran bernilai $C[a,b]$ yang dikonstruksi di atas diperoleh dengan cara membangkitkan ukuran luar pada $C[a,b]$dan membatasinya pada aljabar-σ himpunannya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bartle, R.G., The Elements of Integration and Lebesgue Measure. John Wiley & Sons, New York; 1995.
[2] Boccuto, A., Riecan, B. and Vrabelova, M., Kurzweil-Henstock Integral in Riesz Spaces. Bentham Books; 2009.
[3] Ghoussoub, N., Riesz Spaces Valued Measures and Processes, *Bull. Soc. Math. France*, 1982. (110), hal. 233257
[4] Royden, H.L. and Fitzpatrick, P.M., *Real Analysis*, Fourth Edition, Pearson Education Asia Limited and China Machine Press; 2010.
[5] Ubaidillah, F., Darmawijaya, S., dan Rini, Ch. I., C[a,b]-Valued Measure and Some of Its Properties *Proc. Int. Conf. on Research, Imp. and Edu. of Math. and Sci*., Yogyakarta State University; 2014. hal. M21-M26
[6] Ubaidillah, F., Darmawijaya, S., dan Rini, Ch. I., On the Henstock-Kurzweil Integral of C[a; b] Space-valued Functions, *Int. J. Math. An*. 2015. 9 (37) hal. 1831 – 1846
[7] Wright, J.D.M., Measures with Values in a Partially Ordered Vector Space, *Proc. London Math. Soc*; 1972. 25 hal. 675- 688