Prosiding SI MaNIs (Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami)
Vol.1, No.1, Juli 2017, Hal. 541-546
p-ISSN: **2580-4596; e-ISSN: 2580-460X**

Masalah Sturm-Liouville Singular Fraksional

Nurul Qomariyah*, Sutrima, Supriyadi Wibowo***

*,** Program Studi Matematika Universitas Sebelas Maret Surakarta

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 15 Mei 2017
Direvisi: 1 Juni 2017
Diterbitkan: 31 Juli 2017

Kata kunci:

Singular
Masalah Sturm-Liouville fraksional
Nilai eigen
Fungsi eigen

ABSTRAK

Masalah Sturm-Liouville dibagi menjadi tiga jenis yaitu reguler, periodik, dan singular. Masalah Sturm-Liouville fraksional merupakan perluasan masalah Sturm-Liouville biasa, yaitu dengan memperluas order derivatif bulat menjadi fraksional (tidak bulat). Masalah Sturm-Liouville fraksional dapat dibangun dengan mengganti turunan fraksonal pada operator Sturm-Liouville biasa. Pada penelitian ini diselidiki masalah Sturm-Liouville singular fraksional. Penyelidikan difokuskan pada sifat-sifat *self-adjoint*, nilai eigen, fungsi eigen, dan kesederhanaan dari masalah Sturm-Liouville singular fraksional. Terakhir, diperoleh sifat-sifat masalah Sturm-Liouville singular fraksional yaitu memuat operator *self-adjoint*, mempunyai nilai ei-
gen real, fungsi eigen dari nilai eigen yang berbeda ortogonal terhadap fungsi bobot $r(x)$, dan nilai eigennya sederhana (*simple*).

Supriyadi Wibowo,
Program Studi Matematika,
Universitas Sebelas Maret Surakarta,
Jl. Ir. Sutami No.36A, Jebres, Surakarta, Jawa Tengah, Indonesia 57126
Email: qnurul63@yahoo.co.id

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial Sturm-Liouville merupakan persamaan diferensial biasa dengan orde dua. Persamaan diferensial Sturm-Liouville yang dilengkapi dengan syarat batas homogen disebut masalah Sturm-Liouville. Masalah Sturm- Liouville dibagi menjadi tiga jenis yaitu reguler, periodik, dan singular. Masalah Sturm-Liouville singular memiliki beberapa sifat yaitu memuat operator yang bersifat *self-adjoint*, mempunyai nilai eigen real, dan fungsi eigen dari nilai eigen yang berbeda ortogonal terhadap fungsi bobot $r(x)$.

Permasalahan Sturm-Liouville adalah menentukan nilai eigen λ dan fungsi eigen $y(x)$ yang bersesuaian dengan $r(x)$. Penelitian terhadap metode penyelesaian masalah Sturm-Liouville masih terus dilakukan sampai dengan saat ini. Misalnya, Neamaty dan Darzi [6] menyelesaikan masalah Sturm-Liouville menggunakan Metode Pertubrasi Homotopi (MPH), Al-Mdalall [1] juga telah menyelesaikan masalah Sturm-Liouville menggunakan Metode Dekomposisi Adominan (MDA), dan Erturk [3] menggunakan metode transformasi diferensial untuk menyelesaikan masalah Sturm-Liouville.

Masalah Sturm-Liouville fraksional adalah masalah Sturm-Liouville biasa yang berorde fraksional (tidak bulat). Persamaan diferensial fraksional untuk masalah syarat batas hanya dapat dibangun menggunakan turunan fraksional kanan dan kiri. Dengan menggunakan definisi turunan kanan dan kiri Riemann-Liouville dan Caputo, Zayernouri dan Karniadakis [9] dapat mengonstruksikan persamaan diferensial Sturm-Liouville singular fraksional sebagai

$$L_\alpha[y] = D_{b-}^{\alpha}[p(x)D_{*a+}^{\alpha}y] + q(x)y = \lambda r(x)y$$

dengan L_α adalah suatu operator diferensial fraksional, $p>0$ dan p, q merupakan fungsi kontinu yang bernilai real pada interval $[a, b]$, $r(x)$ disebut fungsi bobot, dan $r(x) > 0$ untuk setiap $x \in (a, b]$. Dengan menerapkan definisi turunan fraksional Riemann-Liouville dengan turunan fraksional Caputo akan diperoleh persamaan diferensial fraksional Sturm-Liouville singular. Kemudian, dengan mengacu pada sifat-sifat yang dimiliki oleh masalah syarat batas Sturm-Liouville singular akan ditentukan sifat-sifat dari masalah syarat batas Sturm-Liouville singular.

2. LANDASAN TEORI

2.1. Kalkulus Fraksional

Menurut Podlubny [7], kalkulus fraksional adalah bidang ilmu matematika yang mempelajari tentang teori integral dan turunan berorde fraksional (tidak bulat) yang merupakan perluasan dari integral dan turunan berorde bulat. Mengacu pada Klimek dan Agrawal [5] operator integral dan turunan fraksional Riemann-Liouville didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1. Diberikan α > 0. Operator integral Riemann-Liouville sisi kiri dan sisi kanan berorder α didefinisikan sebagai

$$I_{a+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, x>a$$
$$I_{b-}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, x<b,$$

dengan Γ dinotasikan sebagai fungsi gamma Euler.

Definisi 2.2. Diberikan α > 0. Operator turunan Riemann-Liouville sisi kiri dan sisi kanan berorde α didefinisikan sebagai

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x)=D(I_{a+}^{1-\alpha}f)(x), x>a \qquad (2.1)$$
$$(D_{b-}^{\alpha}f)(x)=-D(I_{b-}^{1-\alpha}f)(x), x<b$$

Definisi 2.3. Diberikan α > 0, dan *n* =*⌈α⌉*. Operator turunan Caputo sisi kiri dan sisi kanan berorde α didefinisikan sebagai

$$(D_{*a+}^{\alpha}f)(x)=(I_{a+}^{1-\alpha}f)(x), x>a$$
$$(D_{*b-}^{\alpha}f)(x)=(I_{b-}^{1-\alpha}(-D)f)(x), x<b \qquad (2.2)$$

Dengan mengacu pada Karunia [4], berikut diberikan lema tentang kalkulus fraksional.

Lema 2.4. Operator turunan yang didefinisikan pada persamaan (2.1)-(2.2) memenuhi identitas berikut

$$\int_a^b f(x)\, D_{b-}^{\alpha}[g(x)D_{*a+}^{\alpha}k(x)]dx=\int_a^b g(x)D_{*a+}^{\alpha}f(x)D_{a+}^{\alpha}k(x)dx-f(x)I_{a+}^{1-\alpha}[g(x)D_{*a+}^{\alpha}k(x)]|_b^a.$$

2.2. Masalah Sturm-Liouville Fraksional

Mengacu pada Rivero et.al [8], masalah Sturm-Louville fraksional adalah masalah Sturm-Liouville dengan turunan fraksional (tidak bulat). Menurut Darzi dan Neamaty [6], masalah Sturm- Liouville fraksional didefinisikan sebagai

$$D^{\alpha}\big(p(x)y'(x)\big)+q(x)y(x)+\lambda r(x)y(x)=0,\ \ 0<\alpha\le 1, \qquad x\in(a,b), \qquad (2.3)$$

dengan *p(x) > 0*, *r(x) > 0* untuk setiap $x\in(a,b)$ fungsi *p(x)*, *q(x)*, dan *r(x)* kontinu dalam interval *[a, b]*, *r(x)* merupakan fungsi bobot, dan turunan fraksional berorde α. Nilai λ disebut nilai eigen. Penyelesaian *y(x)* yang bersesuaian dengan nilai λ disebut fungsi eigen. Syarat batas dari persamaan (2.3) yaitu

$$c_1y(a)+d_1y'(a)=0, \qquad c_2y(b)+d_2y'(b)=0$$

Dengan c_1,c_2,d_1,d_2 merupakan konstanta real dan ${c_i}^2+{d_i}^2\ge 0, i=1{,}2$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Masalah Sturm-Liouville Singular Fraksional

Masalah Sturm-Liouville singular fraksional adalah persamaan diferensial berbentuk

$$L_\alpha[y]=D_{b-}^{\alpha}[p(x)D_{*a+}^{\alpha}y]+q(x)y=\lambda r(x)y,\ \ \frac{1}{2}<\alpha\le 1, \qquad x\in(a,b) \quad (3.1)$$

yang dilengkapi dengan syarat batas

$$y(a)=0, \quad c_2y(b)+d_2I_{b-}^{1-\alpha}[p(b)D_{*a+}^{\alpha}y(b)]=0$$

dengan $p, D_{b-}^{\alpha}p(x), q, r$ merupakan fungsi kontinu bernilai real pada interval *[a, b]*, *p* dan *r > 0*. Nilai eigen adalah nilai λ yang menyebabkan persamaan (3.1) memiliki penyelesaian tidak tunggal (*y(x) = 0*) sedangkan fungsi eigen adalah penyelesaian yang bersesuaian dengan nilai eigen λ yang diperoleh dari persamaan (3.1) tersebut dan r disebut fungsi bobot.

3.2. Sifat-Sifat Masalah Sturm-Liouville Singular Fraksional

Teorema 3.1. Operator masalah Sturm-Liouville singular fraksional adalah self- adjoint pada interval (a, b].

Bukti. Misal diberikan y_n dan y_m adalah fungsi eigen masalah Sturm-Liouville singular fraksional dengan syarat batas

$$y_n(a)=0, \quad c_2y_n(b)+d_2I_{b-}^{1-\alpha}[p(b)D_{*a+}^{\alpha}y_n(b)]=0 \qquad (3.2)$$
$$y_m(a)=0, \quad c_2y_n(b)+d_2I_{b-}^{1-\alpha}[p(b)D_{*a+}^{\alpha}y_m(b)]=0 \qquad (3.3)$$

Akan dibuktikan bahwa $< L_\alpha[y_n], y_m > = < y_n, L_\alpha[y_m] >$.

1) Akan ditentukan $< L_\alpha[y_n], y_m >$.

$$< L_\alpha[y_n], y_m > = \int_a^b y_m(x) D_{b-}^{\alpha}[p(x) D_{*a+}^{\alpha} y_n(x)] dx + \int_a^b q(x) y_n(x) y_m(x) dx \quad (3.4)$$

Jika Lema 2.4 diterapkan pada persamaan (3.4) dan disubstitusikan pada syarat batas (3.2) maka diperoleh

$$< L_\alpha[y_n], y_m > = \int_a^b p(x) D_{*a+}^{\alpha} y_m(x) D_{*a+}^{\alpha} y_n(x) dx + \frac{c_2}{d_2} y_n(b) y_m(b) + \int_a^b q(x) y_n(x) y_m(x) dx \quad (3.5)$$

2) Akan ditentukan $< y_n, L_\alpha[y_m] >$.

$$< L_\alpha[y_n], y_m > = \int_a^b y_n(x) D_{b-}^{\alpha}[p(x) D_{*a+}^{\alpha} y_m(x)] dx + \int_a^b q(x) y_n(x) y_m(x) dx \quad (3.6)$$

Jika Lema 2.4 diterapkan pada persamaan (3.6) dan disubstitusikan pada syarat batas (3.3) maka diperoleh

$$< L_\alpha[y_n], y_m > = \int_a^b p(x) D_{*a+}^{\alpha} y_n(x) D_{*a+}^{\alpha} y_m(x) dx + \frac{c_2}{d_2} y_m(b) y_n(b) + \int_a^b q(x) y_n(x) y_m(x) dx \quad (3.7)$$

Dapat terlihat pada persamaan (3.5) dan (3.7) bahwa $< L_\alpha[y_n], y_m > = < y_n, L_\alpha[y_m] >$. Dengan kata lain, operator masalah Sturm-Liouville singular fraksional adalah *self-adjoint* pada *(a, b]*. ■

Teorema 3.2. Nilai eigen dari masalah Sturm-Liouville singular fraksional adalah real.

Bukti. Misal diberikan λ adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan fungsi eigen *y* pada operator masalah Sturm-Liouville singular fraksional. Beberapa persamaan yang memenuhi fungsi eigen *y* dan konjugat kompleks fungsi eigen *y* yaitu

$$L_\alpha[y(x)] = \lambda r(x) y(x) \quad (3.8)$$

$$y(a) = 0, \quad c_2 y(b) + d_2 I_{b-}^{1-\alpha}[p(b) D_{*a+}^{\alpha} y(b)] = 0 \quad (3.9)$$

$$L_\alpha[\overline{y(x)}] = \bar{\lambda} r(x) \overline{y(x)} \quad (3.10)$$

$$y(a) = 0, \quad c_2 \overline{y(b)} + d_2 I_{b-}^{1-\alpha}[p(b) D_{*a+}^{\alpha} \overline{y(b)}] = 0 \quad (3.11)$$

Kemudian persamaan (3.8) dikalikan dengan $\overline{y(x)}$ dan persamaan (3.10) dikalikan dengan $y(x)$ serta mengurangkan kedua persamaan tersebut diperoleh

$$\overline{y(x)} L_\alpha[y(x)] - y(x) L_\alpha[\overline{y(x)}] = (\lambda - \bar{\lambda}) |y(x)|^2 r(x). \quad (3.12)$$

Persamaan (3.12) diintegralkan pada interval [a, b] dan diterapkan pada Lema 2.4 sehingga diperoleh

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b |y(x)|^2 r(x) dx = \overline{y(a)} I_{b-}^{1-\alpha}[p(a) D_{*a+}^{\alpha} y(a)] - \overline{y(b)} I_{b-}^{1-\alpha}[p(b) D_{*a+}^{\alpha} y(b)] + y(b) I_{b-}^{1-\alpha}[p(b) D_{*a+}^{\alpha} \overline{y(b)}] - y(a) I_{b-}^{1-\alpha}[p(a) D_{*a+}^{\alpha} \overline{y(a)}]. \quad (3.13)$$

Persamaan (3.9) dan (3.11) disubstitusikan pada persamaan (3.13) diperoleh

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b |y(x)|^2 r(x) dx = 0. \quad (3.14)$$

Karena y(x) adalah penyelesaian nontrivial (y(x) = 0) dan r(x) > 0 maka persamaan (3.14) dapat ditulis sebagai

$$(\lambda - \bar{\lambda}) = 0$$

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Dengan kata lain, nilai eigen dari masalah Sturm-Liouvillw singular fraksional adalah real. ■

Teorema 3.3. Fungsi eigen masalah Sturm-Liouville singular fraksional yang bersesuaian dengan nilai eigen yang berbeda ortogonal terhadap hasil kali dalam

$$< u, v >_r = \int_a^b u(x) v(x) r(x) dx.$$

Bukti. Ambil sembarang dua fungsi eigen yn, ym yang masing-masing bersesuaian dengan nilai eigen λ_n, λ_m dengan $\lambda_n \neq \lambda_m$. Apabila y_n, y_m masing-masing disubstitusikan pada masalah Sturm-Liouville singular fraksional diperoleh beberapa persamaa yaitu

$$L_\alpha[y_n(x)] = \lambda r(x) y_n(x) \quad (3.15)$$

$$y_n(a) = 0, \quad c_2 y_n(b) + d_2 I_{b-}^{1-\alpha}[p(b) D_{*a+}^{\alpha} y_n(b)] = 0 \quad (3.16)$$

$$L_\alpha[y_m(x)] = \lambda r(x) y_m(x) \quad (3.17)$$

$$y_m(a) = 0, \quad c_2 y_n(b) + d_2 I_{b-}^{1-\alpha}[p(b) D_{*a+}^{\alpha} y_m(b)] = 0 \quad (3.18)$$

Jika persamaan (3.15) dikalikan dengan y_m dan persamaan (3.17) dikalikan dengan y_n serta mengurangkan kedua persamaan tersebut maka diperoleh

$$y_m L_\alpha[y_n] - y_n(x) L_\alpha[y_m] = (\lambda_n - \lambda_m) y_n y_m r(x). \quad (3.19)$$

Persamaan (3.19) diintegralkan pada interval *[a, b]* dan diterapkan pada persamaan (3.1) sehingga diperoleh

$$\int_a^b (\lambda_n - \lambda_m) y_n y_m r(x) dx = \int_a^b (y_m D_{b-}^{\alpha}[p(x) D_{*a+}^{\alpha}\, y_n] - y_n D_{b-}^{\alpha}[p(x) D_{*a+}^{\alpha} y_m]) dx. \quad (3.20)$$

Jika Lema 2.4 diterapkan pada persamaan (3.20) maka diperoleh

$$\int_a^b (\lambda_n - \lambda_m) y_n y_m r(x) dx = y_m(a) I_{b-}^{1-\alpha}[p(a) D_{*a+}^{\alpha} y_n(a)] - y_m(b) I_{b-}^{1-\alpha}[p(b) D_{*a+}^{\alpha} y_n(b)] +$$
$$y_n(b) I_{b-}^{1-\alpha}[p(b) D_{*a+}^{\alpha} y_m(b)] - y_n(a) I_{b-}^{1-\alpha}[p(a) D_{*a+}^{\alpha} y_m(a)]. \quad (3.21)$$

Persamaan (3.16) dan (3.18) disubstitusikan pada persamaan (3.21) diperoleh

$$\int_a^b (\lambda_n - \lambda_m) y_n y_m r(x) dx = 0. \quad (3.22)$$

Karena $\lambda_n \neq \lambda_m$ maka persamaan (3.22) dapat ditulis sebagai

$$\int_a^b y_n y_m r(x) dx = < y_n, y_m >_r = 0.$$

Dengan kata lain, fungsi eigen masalah Sturm-Liouville singular fraksional yang bersesuaian dengan nilai eigen yang berbeda ortogonal terhadap hasil kali dalamnya. ■

Teorema 3.4. Nilai eigen dari masalah Sturm-Liouville singular fraksional adalah sederhana (*simple*).

Bukti. Diberikan λ merupakan nilai eigen yang bersesuaian dengan fungsi eigen dari masalah Sturm-Liouville singular fraksional dengan y_1, y_2 merupakan syarat batas

$$y_1(a) = 0, \quad c_2 y_n(b) + d_2 I_{b-}^{1-\alpha}[p(b) D_{*a+}^{\alpha} y_1(b)] = 0 \quad (3.23)$$
$$y_2(a) = 0, \quad c_2 y_n(b) + d_2 I_{b-}^{1-\alpha}[p(b) D_{*a+}^{\alpha} y_2(b)] = 0 \quad (3.24)$$

Wronskian pada *x* = *a* dirumuskan

$$W_\alpha[y_1, y_2](a) = y_1(a) D_{*a+}^{\alpha} y_2(b) - y_2(a) D_{*a+}^{\alpha} y_1(b). \quad (3.25)$$

Jika syarat batas (3.23) dan (3.24) disubstitusikan ke persamaan (3.25) maka $W_\alpha[y_1, y_2](a) = 0$. Jadi y_1 dan y_2 bergantung linier. Karena $W_\alpha[y_1, y_2](a) = 0$ serta y_1 dan y_2 bergantung linier maka dapat disimpulkan bahwa nilai eigen dari Sturm-Liouville singular fraksional adalah *simple*. ■

4. PENERAPAN KASUS

Contoh 4.1.

Diberikan masalah Sturm-Liouville singular yaitu

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad x \epsilon (0,1) \qquad (4.1)$$

dengan syarat batas

$$y(0) = 0, y(1) + y'(1) = 0.$$

Persamaan (4.1) dapat ditulis dalam bentuk

$$L_1[y(x)] = \lambda y(x). \quad (4.2)$$

Syarat batas dari persamaan (4.1) dapat ditulis kedalam bentuk

$$y(0) = 0, y(1) + D_{*0+}^{1} y(1) = 0. \quad (4.3)$$

Terlihat bahwa persamaan (4.2) apabila dilengkapi dengan persamaan (4.3) merupakan bentuk masalah Sturm-Liouville singular fraksional dengan orde *α = 1*. Mengacu pada Boyce dan DiPrima [2] nilai eigen yang diperoleh dari persamaan (4.1) yaitu $\lambda_1 \cong 4.116, \lambda_2 \cong 24.14, \lambda_3 \cong 63.66$, dan $\lambda_n \cong (2n-1)^2\pi^2/4$ untuk n = 4, 5, ... Hal ini menunjukkan bahwa nilai eigen dari persamaan (4.1) adalah real. Fungsi eigen dari persamaan (4.1) yaitu

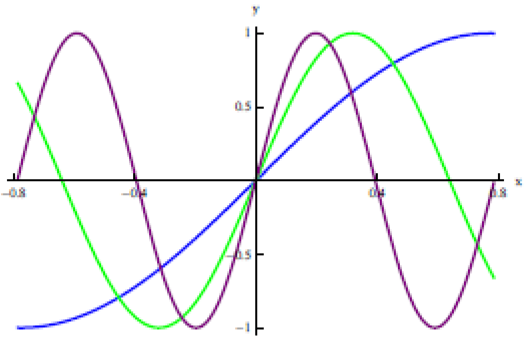
$$y_n(x) = k_n sin\sqrt{\lambda_n} x, \qquad n = 1,2, \ldots, \qquad (4.3)$$

dengan k_n adalah sembarang konstanta, serta $sin\sqrt{\lambda_n} x$ bergantung linier jadi nilai eigennya *simple*. Selanjutnya, dipilih sembarang nilai eigen dan disubstitusikan pada persamaan (4.4), serta dengan mengambil nilai $k_n = 1$ diperoleh hasil perhitungan berikut.

$$\int_0^1 y_1(x) y_2(x) r(x) dx = -0.0000110178,$$
$$\int_0^1 y_1(x) y_3(x) r(x) dx = 5.31396 \times 10^{-6},$$
$$\int_0^1 y_2(x) y_3(x) r(x) dx = -2.57132 \times 10^{-6}.$$

Dari hasil perhitungan tersebut terlihat bahwa hasilnya mendekati nol. Dengan kata lain, fungsi eigen dari nilai yang berbeda ortogonal terhadap fungsi bobot. Di pihak lain, adanya fungsi eigen yang telah diperoleh ini menunjukkan bahwa persamaan (4.1) mempunyai penyelesaian. Grafik penyelesaian dari persamaan (4.1) ditunjukkan pada Grafik 1.

y



Gambar 1. y_0 (merah), y_1 (biru), y_2 (hijau), dan y_3 (ungu)

Contoh 4.2.

Diberikan masalah Sturm-Liouville singular fraksional dengan orde $\alpha = 5/8$ yaitu

$$D^{\frac{5}{8}}y(x) = \lambda y(x) \qquad (4.5)$$

dengan syarat batas

$$y(0) = 0, y(1) + I_{1-}^{\frac{3}{8}} D_{*0+}^{\frac{5}{8}} y(1) = 0. \qquad (4.6)$$

Nilai eigen dari persamaan (4.5) yaitu $\lambda_1 \cong 2.749, \lambda_2 \cong 8.051, \lambda_3 \cong 14.334$ dan $\lambda_n \cong 7(2n+1)\pi/8$ untuk n = 4, 5, · · · . Hal ini menunjukkan bahwa nilai eigen dari persamaan (4.5) adalah real. Mengacu pada Rivero *et.al* [8], fungsi eigen dari persamaan (4.5) yaitu

$$y_n(x) = k_n \sin(\lambda_n^{\frac{4}{5}} x), \qquad n = 1,2,\dots, \qquad (4.7)$$

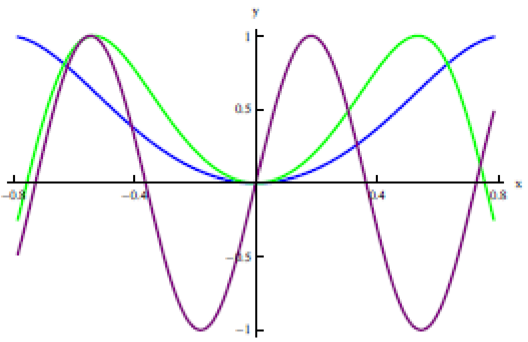
dengan k_n adalah sembarang konstanta, serta $\sin(\lambda_n^{\frac{4}{5}} x)$ bergantung linier jadi nilai eigennya *simple*. Selanjutnya, dipilih sembarang nilai eigen dan disubstitusikan pada persamaan (4.7), serta dengan mengambil nilai $k_n = 1$ diperoleh hasil perhitungan berikut.

$$\int_0^1 y_1(x) y_2(x) r(x) dx = -0.0497079,$$

$$\int_0^1 y_1(x) y_3(x) r(x) dx = 0.0351459,$$

$$\int_0^1 y_2(x) y_3(x) r(x) dx = -0.0283974.$$

Dari hasil perhitungan tersebut terlihat bahwa hasilnya mendekati nol. Dengan kata lain, fungsi eigen dari nilai yang berbeda ortogonal terhadap fungsi bobot. Di pihak lain, adanya fungsi eigen yang telah diperoleh ini menunjukkan bahwa persamaan (4.5) mempunyai penyelesaian. Grafik penyelesaian dari persamaan (4.5) ditunjukkan pada Grafik 2.



Gambar 1. y_0 (merah), y_1 (biru), y_2 (hijau), dan y_3 (ungu)

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dapat diperoleh kesimpulan bahwa masalah Sturm-Liouville singular fraksional mempunyai sifat yang serupa dengan masalah Sturm- Liouville singular. Sifat-sifatnya yaitu memuat operator yang bersifat self-adjoint, mempunyai nilai eigen real, fungsi eigen dari nilai eigen yang berbeda ortogonal terhadap fungsi bobot r(x), dan nilai eigennya sederhana (*simple*).

DAFTAR PUSTAKA

[1] Al-Mdalall, Q.M., *An Efficient Method for Solving Fractional Sturm-Liouville Problems*, Chaos Solitons Fractals **40** (2009), no. 1, 183–189.

[2] Boyce, W.E. and R.C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary value problems*, John Wiley and Sons, Inc, United States of America, 2001.

[3] Ertu¨rka, V. S., *Computing Eigenelements of Sturm-Liouville Problems of Fractional Order via Fractional Diferential Transform Method*,, Math. Comput. Appl **16** (2011), 712–720.

[4] Karunia, N., *Masalah Syarat Batas Sturm-Liouville Singular Fraksional untuk Persamaan Bessel*, Skripsi Jurusan Matematika FMIPA UNS, Surakarta, 2014.

[5] Klimek, M. and O. P. Agrawal, *On a Regular Fractional Sturm-Liouville Problem with Derivatives of Order in (0,1)*, 13th International Carpathian Control Conference, Vysoke Tatry (2012), 284–289.

[6] Neamaty, A. and R. Darzi., *Homotopy Perturbation Method for Solving Sturm- Liouville Problem of Fractional Order*, Journal Application Math **8** (2011), 61–71.

[7] Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[8] Rivero, M., J. Trujillo, and M.P. Velasco, *A Fractional Approach to Sturm-Liouville Problems*, Central European Journal of Physics **11** (2013), no.10.

[9] Zayernouri, M. and G.E. Karniadakis, *Fraktional Sturm-Liouville eigen-problems : Theory and Numerical Approimation*, Jurnal of Computational Physics **252** (2013), 495-517