

Aplikasi Reduksi Model dengan Metode *Linear Matrix Inequality* pada Masalah Kualitas Air Kali Surabaya

Nenik Estuningsih¹, Fatmawati²

^{1,2}Departement of Mathematics, Universitas Airlangga

Email: nenik_30@yahoo.com

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 15 Mei 2017

Direvisi: 1 Juni 2017

Diterbitkan: 31 Juli 2017

Kata Kunci:

Kali Surabaya

Reduksi Model

Linear Matrix Inequality

ABSTRAK

Pada realita yang banyak terjadi, sebuah sistem yang diperoleh dari suatu model matematika merupakan sistem yang berorder tinggi. Order dari sistem yang dimaksud adalah order atau dimensi dari ruang keadaan yang terbentuk sebagai realisasi lain sebuah sistem. Salah satu contoh sistem berorder tinggi adalah masalah kualitas air Kali Surabaya. Sistem berorder tinggi tersebut dapat direduksi menjadi sistem sederhana dengan order yang lebih kecil dari sistem awal dengan mempertahankan sifat-sifat sistem awal. Penelitian ini bertujuan untuk mereduksi sistem pada masalah air Kali Surabaya yang berorder tinggi dengan menggunakan metode *Linear Matrix Inequality*. Sistem yang akan direduksi dalam keadaan stabil, bisa disetimbangkan, dan selanjutnya dilakukan reduksi, dan diperoleh bahwa sistem tereduksi yang diperoleh tetap stabil, terkendali, dan terobservasi. Diperoleh bahwa error yang terjadi akibat reduksi dengan menggunakan metode *Linear Matrix Inequality* adalah lebih kecil dibandingkan dengan error yang terjadi akibat reduksi dengan metode pemotongan setimbang.

Copyright © 2017 SI MaNIs.
All rights reserved.

Korespondensi:

Nenik Estuningsih,

Departement of Mathematics,

Universitas Airlangga,

Kampus C Mulyorejo Surabaya, Jawa Timur, Indonesia 60115

Email: nenik_30@yahoo.com

1. PENDAHULUAN

Kali Surabaya memiliki arti penting bagi Kota Surabaya. Kali Surabaya menjadi sumber utama bagi PDAM Surabaya dan beberapa industri di sepanjang Kali Surabaya. Fungsi penting ini menjadi salah satu alasan pentingnya menjaga kualitas air Kali Surabaya dari pencemaran (Masduqi dan Apriliani, 2008). Untuk mengetahui kondisi kualitas air Kali Surabaya perlu dilakukan estimasi.

Sistem yang diperoleh dari model matematika masalah kualitas air Kali Surabaya merupakan sistem yang berorder tinggi/besar. Order dari sistem yang dimaksud adalah order atau dimensi dari ruang keadaan yang terbentuk sebagai realisasi lain sebuah sistem. Tingginya order dari suatu sistem tentu berpengaruh terhadap singkat tidaknya waktu komputasi pada saat dilakukan estimasi (Arif, 2014). Oleh karena itu untuk memperkecil waktu komputasi, dapat dilakukan dengan cara mengganti sistem yang berorder tinggi dengan sistem yang sederhana yang ordernya lebih kecil tanpa kesalahan yang signifikan. Model dengan order yang lebih kecil ini disebut dengan model tereduksi. Adapun cara untuk mendapatkan model tereduksi disebut reduksi model (Grigoriadis, 1995). Metode reduksi order model telah banyak dikembangkan, diantaranya adalah metode pemotongan setimbang (Sigurd, 2001) dan metode LMI (*Linear Matrix Inequality*) (Grigoriadis, 1995, Ebihara & Hagiwara, 2004, Ebihara dkk, 2008, dan Khademi dkk, 2015). Metode pemotongan setimbang menjamin adanya batas atas dari *error* reduksi, sementara untuk metode LMI tidak demikian.

Metode reduksi yang digunakan dalam tulisan ini adalah metode LMI karena banyak masalah sistem dan kontrol yang bisa dibawa ke bentuk LMI sehingga bisa diselesaikan dengan mudah. Di sisi lain, diduga bahwa hasil *error* reduksi yang dihasilkan metode LMI jauh lebih kecil dibandingkan dengan *error* reduksi yang dihasilkan metode pemotongan setimbang. Hal itu terjadi karena reduksi model dengan metode pemotongan setimbang dilakukan dengan mereduksi order model dari sistem yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel kecil setelah diurutkan, sedangkan reduksi model menggunakan metode LMI dilakukan dengan menitikberatkan pereduksian orde model pada *error* reduksi yang terjadi sehingga sistem baru yang dihasilkan memiliki *error* seminimal mungkin terhadap sistem semula. Tulisan ini menjelaskan penerapan reduksi model dengan metode LMI pada masalah kualitas air Kali Surabaya.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Diberikan sistem linear waktu diskrit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ yang berorder n dengan persamaan ruang keadaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathbf{A}x_k + \mathbf{B}u_k, \\ y_k &= \mathbf{C}x_k + \mathbf{D}u_k, \\ k &= 0, 1, 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

dengan $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, dan $\mathbf{D}$ masing-masing adalah matriks real yang berukuran $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$, dan $q \times p$.

Fungsi transfer dari sistem linear waktu diskrit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ yang berorder n tersebut dinotasikan $G(z)$ yang didefinisikan sebagai

$$G(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D},$$

dengan realisasi ruang keadaan sebagai berikut :

$$G(z) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right].$$

Di lain pihak, persamaan ruang keadaan dari sistem linear waktu diskrit tereduksi $(\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_r)$ yang berorde r dengan $r < n$ dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} x_{rk+1} &= \mathbf{A}_r x_{rk} + \mathbf{B}_r u_{rk}, \\ y_{rk} &= \mathbf{C}_r x_{rk} + \mathbf{D}_r u_{rk}, \end{aligned}$$

dengan $\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r$, dan $\mathbf{D}_r$ masing-masing adalah matriks real yang berukuran $r \times r$, $r \times p$, $q \times r$, dan $q \times p$.

Fungsi transfer dari sistem linear waktu diskrit tereduksi $(\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_r)$ yang berorder r dengan $r < n$ tersebut dinotasikan $G_r(z)$ yang didefinisikan sebagai

$$G_r(z) = \mathbf{C}_r(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_r)^{-1}\mathbf{B}_r + \mathbf{D}_r$$

dengan bentuk realisasi ruang keadaan sebagai berikut :

$$G_r(z) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_r & \mathbf{B}_r \\ \hline \mathbf{C}_r & \mathbf{D}_r \end{array} \right].$$

Selanjutnya, *error* yang ditimbulkan akibat reduksi orde model dinotasikan $E(z)$ dan didefinisikan sebagai

$$E(z) = G(z) - G_r(z) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_e & \mathbf{B}_e \\ \hline \mathbf{C}_e & \mathbf{D}_e \end{array} \right].$$

Lebih lanjut, fungsi transfer dari $E(z)$ didefinisikan sebagai

$$G_e(z) = \mathbf{C}_e(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_e)^{-1}\mathbf{B}_e + \mathbf{D}_e.$$

Dari sini diperoleh

$$y_{ek} = y_k - y_{rk} = [\mathbf{C} \quad -\mathbf{C}_r] \begin{bmatrix} x_k \\ x_{rk} \end{bmatrix} + [\mathbf{D} \quad -\mathbf{D}_r] \begin{bmatrix} u_k \\ u_{rk} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan aturan operasi penjumlahan pada sistem, maka diperoleh persamaan ruang keadaan untuk $E(z)$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_{ek+1} &= \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{rk+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{rk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}_r \end{bmatrix} u_k, \\ y_{ek} &= [\mathbf{C} \quad -\mathbf{C}_r] \begin{bmatrix} x_k \\ x_{rk} \end{bmatrix} + (\mathbf{D} - \mathbf{D}_r) u_k. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, realisasi ruang keadaan untuk $E(z)$ adalah

$$E(z) = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} & 0 & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{A}_r & \mathbf{B}_r \\ \hline \mathbf{C} & -\mathbf{C}_r & \mathbf{D} - \mathbf{D}_r \end{array} \right].$$

Berdasarkan realisasi ruang keadaan untuk $E(z)$ di atas, diperoleh

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_r \end{bmatrix}, \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}_r \end{bmatrix}, \mathbf{C}_e = [\mathbf{C} \quad -\mathbf{C}_r], \text{ dan } \mathbf{D}_e = [\mathbf{D} - \mathbf{D}_r].$$

Selanjutnya, prinsip dari reduksi order model dengan metode LMI adalah mendapatkan sistem tereduksi yang mempunyai order lebih kecil daripada sistem semula dengan *error* hasil reduksi yang ditimbulkan seminimal mungkin. *Error* hasil reduksi ini diukur dengan *norm* $\mathcal{H}_\infty$ dan dinotasikan $\|E(z)\|_\infty$. Reduksi order model dengan LMI dilakukan pada pertidaksamaan matriks linear sehingga bentuk $\|E(z)\|_\infty$ harus ditransformasi ke dalam bentuk pertidaksamaan matriks linear dengan menggunakan *Bounded Real Lemma*.

Pernyataan pada *Bounded Real Lemma* tersebut adalah sebagai berikut.

Misalkan $\gamma > 0$ dan $E(z) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_e & \mathbf{B}_e \\ \hline \mathbf{C}_e & \mathbf{D}_e \end{array} \right]$, maka $\|E(z)\|_\infty < \gamma$ jika dan hanya jika terdapat $P > 0$ sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_e & \mathbf{B}_e \\ \mathbf{C}_e & \mathbf{D}_e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e & \mathbf{B}_e \\ \mathbf{C}_e & \mathbf{D}_e \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

Agar ukuran matriks P besesuaian dengan matriks $\mathbf{A}_e, \mathbf{B}_e, \mathbf{C}_e$, dan $\mathbf{D}_e$, maka matriks P dapat dipartisi menjadi

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} > 0,$$

dengan P_{11}, P_{12} , dan P_{22} masing-masing adalah matriks real yang berukuran $n \times n$, $n \times r$, dan $r \times r$ sehingga P adalah matriks definit positif yang berukuran $(n+r) \times (n+r)$.

Berdasarkan matriks $\mathbf{A}_e, \mathbf{B}_e, \mathbf{C}_e, \mathbf{D}_e$, dan P maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_e & \mathbf{B}_e \\ \mathbf{C}_e & \mathbf{D}_e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e & \mathbf{B}_e \\ \mathbf{C}_e & \mathbf{D}_e \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} < 0, \quad (2)$$

dengan

$$\begin{aligned} M_{11} &= \mathbf{A}^T P_{11} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} - P_{11}, \\ M_{12} &= \mathbf{A}^T P_{12} \mathbf{A}_r - \mathbf{C}^T \mathbf{C}_r - P_{12}, \\ M_{13} &= \mathbf{A}^T P_{11} \mathbf{B} + \mathbf{A}^T P_{12} \mathbf{B}_r + \mathbf{C}^T \mathbf{D} - \mathbf{C}^T \mathbf{D}_r, \\ M_{21} &= \mathbf{A}_r^T P_{12}^T \mathbf{A} - \mathbf{C}_r^T \mathbf{C} - P_{12}^T, \\ M_{22} &= \mathbf{A}_r^T P_{22} \mathbf{A}_r + \mathbf{C}_r^T \mathbf{C}_r - P_{22}, \\ M_{23} &= \mathbf{A}_r^T P_{12}^T \mathbf{B} + \mathbf{A}_r^T P_{22} \mathbf{B}_r - \mathbf{C}_r^T \mathbf{D} + \mathbf{C}_r^T \mathbf{D}_r, \\ M_{31} &= \mathbf{B}^T P_{11} \mathbf{A} + \mathbf{B}_r^T P_{12}^T \mathbf{A} + \mathbf{D}^T \mathbf{C} - \mathbf{D}_r^T \mathbf{C}, \\ M_{32} &= \mathbf{B}^T P_{12} \mathbf{A}_r + \mathbf{B}_r^T P_{22} \mathbf{A}_r - \mathbf{D}^T \mathbf{C}_r + \mathbf{D}_r^T \mathbf{C}_r, \\ M_{33} &= \mathbf{B}^T P_{11} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T P_{12} \mathbf{B}_r + \mathbf{B}_r^T P_{12}^T \mathbf{B} + \mathbf{B}_r^T P_{22} \mathbf{B}_r + \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \mathbf{D}^T \mathbf{D}_r - \mathbf{D}_r^T \mathbf{D} + \mathbf{D}_r^T \mathbf{D}_r - \gamma^2 I, \end{aligned}$$

dengan ukuran matriks pada pertidaksamaan (2) di atas adalah $(n+r+p+q) \times (n+r+p+q)$.

Dengan demikian, aplikasi dari *Bounded Real Lemma* untuk $G(z) - G_r(z)$ adalah sebagai berikut.

$$\text{Misalkan } \gamma > 0 \text{ dan } G(z) - G_r(z) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{A}_r \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B}_r \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \hline \mathbf{C} \end{array} \begin{array}{c} \\ \hline -\mathbf{C}_r \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \hline \mathbf{D} - \mathbf{D}_r \end{array}.$$

$\|G(z) - G_r(z)\|_\infty < \gamma$ jika dan hanya jika terdapat $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} > 0$ sedemikian hingga

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} < 0.$$

Karena matriks-matriks $\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_r, P_{11}, P_{12}$, dan P_{22} pada pertidaksamaan matriks (2) merupakan variabel yang akan dicari, maka pertidaksamaan matriks (2) tersebut merupakan bentuk pertidaksamaan matriks tak linear. Matriks-matriks yang tak linear pada pertidaksamaan matriks (2), antara lain:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}^T P_{12} \mathbf{A}_r - \mathbf{C}^T \mathbf{C}_r - P_{12}, \\ &\mathbf{A}^T P_{11} \mathbf{B} + \mathbf{A}^T P_{12} \mathbf{B}_r + \mathbf{C}^T \mathbf{D} - \mathbf{C}^T \mathbf{D}_r, \\ &\mathbf{A}_r^T P_{22} \mathbf{A}_r + \mathbf{C}_r^T \mathbf{C}_r - P_{22}, \\ &\mathbf{A}_r^T P_{12}^T \mathbf{B} + \mathbf{A}_r^T P_{22} \mathbf{B}_r - \mathbf{C}_r^T \mathbf{D} + \mathbf{C}_r^T \mathbf{D}_r, \\ &\mathbf{B}^T P_{11} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T P_{12} \mathbf{B}_r + \mathbf{B}_r^T P_{12}^T \mathbf{B} + \mathbf{B}_r^T P_{22} \mathbf{B}_r + \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \mathbf{D}^T \mathbf{D}_r - \mathbf{D}_r^T \mathbf{D} + \mathbf{D}_r^T \mathbf{D}_r - \gamma^2 I, \end{aligned}$$

dan masing-masing matriks transposenya. Akibatnya, reduksi orde model dengan metode LMI belum dapat dilakukan. Oleh karena itu, pertidaksamaan matriks tak linear tersebut harus ditransformasi ke dalam bentuk pertidaksamaan matriks linear (LMI). Transformasi bentuk pertidaksamaan matriks tak linear menjadi

linear dituangkan dalam Teorema 1 yang menyatakan syarat perlu dan cukup bagi eksistensi reduksi order model dengan metode LMI.

Teorema 1. Diberikan sistem linear waktu diskrit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ sebagaimana dalam model sistem (1) yang berorder n dengan fungsi transfer $G(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ dan realisasi ruang keadaan dari sistem tersebut adalah minimal, yakni

$$G(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}.$$

Terdapat sistem linear waktu diskrit tereduksi $(\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_r)$ yang berorde $r < n$ dengan fungsi transfer $G_r(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ yang memenuhi $\|G(z) - G_r(z)\|_\infty < \gamma$ jika dan hanya jika terdapat $X_{11} \in \mathcal{S}_n$, $P_{11} \in \mathcal{S}_n$, $P_{12} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, dan $P_{22} \in \mathcal{S}_r$ yang memenuhi dua pertidaksamaan matriks berikut.

$$\text{i. } -X_{11} + \mathbf{A}X_{11}\mathbf{A}^T + \frac{1}{\gamma^2}\mathbf{B}\mathbf{B}^T < 0$$

$$\text{ii. } -P_{11} + \mathbf{A}^T P_{11} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} < 0$$

dengan $X_{11} = (P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T)^{-1}$ dan $\mathcal{S}_n$ menyatakan himpunan matriks-matriks definit positif berukuran $n \times n$.

(Ebihara dkk, 2008)

Selanjutnya matriks gramian keterkendalian M dan matriks gramian keterobservasian N dari sistem diskrit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$, yaitu:

$$M := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \mathbf{B}^T (\mathbf{A}^T)^k,$$

dan

$$N := \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{A}^T)^k \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{A}^k,$$

masing-masing adalah definit positif dan merupakan penyelesaian tunggal dari persamaan Lyapunov :

$$\mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T - M = 0,$$

dan

$$\mathbf{A}^T \mathbf{N} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} - N = 0.$$

Definisi 2. Diberikan M dan N masing-masing adalah matriks gramian keterkendalian dan matriks gramian keterobservasian yang berukuran $n \times n$. **Nilai singular Hankel** dari sistem $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ dengan fungsi transfer $G(z)$ didefinisikan sebagai

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(MN)}$$

dengan $\lambda_i(MN)$ menyatakan nilai eigen terbesar ke- i dari matriks (MN) untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

(Ebihara dkk, 2008)

Definisi 3. Diberikan matriks gramian keterkendalian $M > 0$ dan matriks gramian keterobservasian $N > 0$. Sistem $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ yang berorde n dengan fungsi transfer $G(z)$ dikatakan **setimbang** jika $M = N = \Sigma$ sehingga memenuhi

$$\mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T - M = 0,$$

dan

$$\mathbf{A}^T \mathbf{N} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} - N = 0.$$

dengan

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1 I_{k_1}, \dots, \sigma_l I_{k_l}, \sigma_{l+1} I_{k_{l+1}}, \dots, \sigma_m I_{k_m}),$$

$$\sigma_1 > \dots > \sigma_l > \sigma_{l+1} > \dots > \sigma_m > 0.$$

Keterangan: k_i menyatakan multiplisitas dari σ_i dengan $k_1 + \dots + k_l + k_{l+1} + \dots + k_m = n$.

(Ebihara dkk, 2008)

Berdasarkan Teorema 1 dapat diturunkan suatu batas bawah dari *error* hasil reduksi orde model yang terjadi. Batas bawah dari $\|G(z) - G_r(z)\|_\infty$ dinyatakan dalam Teorema 4 berikut.

Teorema 4. Diberikan sistem linear waktu diskrit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ yang berorde n dengan fungsi transfer $G(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty$ yang mempunyai nilai singular Hankel $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0$. Maka, untuk setiap sistem linear waktu diskrit tereduksi $(\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_r)$ yang berorde $r < n$ dengan fungsi transfer

$$G_r(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{B}_r \\ \mathbf{C}_r & \mathbf{D}_r \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty \text{ berlaku}$$

$$\|G(z) - G_r(z)\|_\infty \geq \sigma_{r+1}.$$

(Ebihara dkk, 2008)

Selanjutnya, batas atas terkecil dari $\|G(z) - G_{n-k_m}(z)\|_\infty$ tertuang pada Lema 5 berikut.

Lema 5. Diberikan sistem linear waktu diskrit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ yang berorde n dengan fungsi transfer $G(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ yang mempunyai nilai singular Hankel

$$\sigma_1 > \dots > \sigma_l > \sigma_{l+1} > \dots > \sigma_m > 0,$$

dengan σ_1 sebanyak k_1 , σ_2 sebanyak k_2 , dan seterusnya sampai σ_m sebanyak k_m sehingga $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Maka, untuk setiap $\gamma > \sigma_m$, terdapat sistem linear waktu diskrit tereduksi $(\mathbf{A}_{n-k_m}, \mathbf{B}_{n-k_m}, \mathbf{C}_{n-k_m}, \mathbf{D}_{n-k_m})$ yang berorde $n - k_m$ dengan fungsi transfer $G_{n-k_m}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ yang memenuhi

$$\|G(z) - G_{n-k_m}(z)\|_\infty < \gamma.$$

(Ebihara dkk, 2008)

Berikut ini adalah algoritma secara umum yang didasarkan pada teorema-teorema dari paper Ebihara dkk (2008) untuk menentukan eksistensi dari sistem tereduksi serta mendapatkan sistem linear waktu diskrit tereduksi $(\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_r)$, $r = n - k_m$ yang berorde $n - k_m$ dengan fungsi transfer $G_{n-k_m}(z)$ yang meminimalkan $\|G(z) - G_{n-k_m}(z)\|_\infty$:

1. Membentuk matriks $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, dan $\mathbf{D}$ dari sistem linear waktu diskrit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ yang berorde n .
2. Menyelidiki sifat kestabilan, keterkendalian, dan keterobservasian dari sistem diskrit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ tersebut.
3. Jika sistem diskrit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ tersebut bersifat stabil, terkendali, dan terobservasi, maka lanjut ke Langkah 4 dan jika sistem diskrit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ tersebut tidak memenuhi salah satu sifat, baik stabil, terkendali, ataupun terobservasi, maka proses berhenti atau dengan kata lain, tidak dapat ditemukan sistem tereduksi.
4. Menentukan fungsi transfer $G(z)$ dari sistem diskrit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$.
5. Membentuk realisasi setimbang dari fungsi transfer $G(z)$ dan memisalkan realisasi setimbang tersebut sebagai $G_s(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \\ \mathbf{C}_s & \mathbf{D}_s \end{bmatrix}$.
6. Mendefinisikan matriks $P_{12} = \begin{bmatrix} I_{n-k_m} \\ 0_{k_m \times (n-k_m)} \end{bmatrix}$.
7. Meminimalkan nilai γ^2 yang memenuhi tiga pertidaksamaan matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12}Q_{22} \\ Q_{22}P_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} > 0, \\ \begin{bmatrix} -(P_{11} - P_{12}Q_{22}P_{12}^T) & (P_{11} - P_{12}Q_{22}P_{12}^T)\mathbf{A} & (P_{11} - P_{12}Q_{22}P_{12}^T)\mathbf{B} \\ \mathbf{A}^T(P_{11} - P_{12}Q_{22}P_{12}^T)^T & -(P_{11} - P_{12}Q_{22}P_{12}^T) & 0 \\ \mathbf{B}^T(P_{11} - P_{12}Q_{22}P_{12}^T)^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \\ -P_{11} + \mathbf{A}^T P_{11} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} < 0,$$

dengan $P_{11} \in \mathcal{S}_n$ dan $Q_{22} \in \mathcal{S}_{n-k_m}$ adalah matriks yang bertindak sebagai variabel.

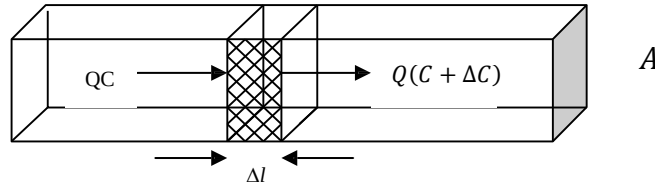
8. Menentukan invers dari matriks Q_{22} dan dinotasikan Q_{22}^{-1} .
9. Mendefinisikan matriks $\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & Q_{22}^{-1} \end{bmatrix}$ dan menotasikan nilai optimal γ yang diperoleh dari langkah 7 dengan γ_{opt} .
10. Substitusi matriks $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$ dengan matriks $\tilde{P}$ dan nilai γ dengan γ_{opt} pada pertidaksamaan matriks simetri berikut

$$\begin{bmatrix} -P_{11} & -P_{12} & 0 & \mathbf{A}^T P_{11} & \mathbf{A}^T P_{12} & \mathbf{C}^T \\ * & -P_{22} & 0 & P_{22} \bar{\mathbf{A}}_r^T P_{22}^{-1} P_{12}^T & P_{22} \bar{\mathbf{A}}_r^T & -P_{22} \bar{\mathbf{C}}_r^T \\ * & * & -\gamma^2 I_p & \mathbf{B}^T P_{11} + \bar{\mathbf{B}}_r^T P_{22}^{-1} P_{12}^T & \mathbf{B}^T P_{12} + \bar{\mathbf{B}}_r^T & \mathbf{D}^T - \bar{\mathbf{D}}_r^T \\ * & * & * & -P_{11} & -P_{12} & 0 \\ * & * & * & * & -P_{22} & 0 \\ * & * & * & * & * & -I_q \end{bmatrix} < 0.$$

11. Menentukan matriks $\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r$, dan $\mathbf{D}_r$ sebagai solusi dari pertidaksamaan matriks linier yang diperoleh dari langkah 10 sehingga diperoleh sistem linear waktu diskrit tereduksi $(\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_r)$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Kualitas air dapat dinyatakan dengan parameter BOD (*Biochemical Oxygen Demand*) yang menyatakan besarnya kebutuhan oksigen untuk menguraikan bahan organik yang mencemari air sungai. Perhitungan BOD dalam sistem sungai dapat didekati dengan model *plug flow* (Masduqi & Apriliani, 2008) dengan volume kontrol pada Gambar 1.



Gambar 1. Volume kontrol aliran sistem *plug flow* (Masduqi & Apriliani, 2008).

Diberikan debit sungai Q , konsentrasi polutan C , volume V , luas penampang A , waktu t , konstanta reaksi biodegradasi α , kecepatan aliran air $\bar{u}$, dan panjang segmen sungai l , maka perhitungan volume kontrol adalah sebagai berikut:

$$\text{Accumulation} = \text{Inputs} - \text{Outputs} + \text{Reactions}$$

$$\frac{d(VC)}{dt} = QC - Q(C + \Delta C) - \alpha CV. \quad (5)$$

$$C \frac{dV}{dt} + V \frac{dC}{dt} = QC - Q(C + \Delta C) - \alpha CV. \quad (6)$$

Persamaan (6) dibagi dengan V , untuk $V = A\Delta l$ dan $\frac{dV}{dt} = 0$, maka :

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{Q\Delta C}{A\Delta l} - \alpha C. \quad (7)$$

Untuk limit $\Delta l \rightarrow 0$, maka :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{Q\partial C}{A\partial l} - \alpha C. \quad (8)$$

Bila $Q/A = \bar{u}$, maka :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial C}{\partial l} - \alpha C. \quad (9)$$

Reduksi model pada masalah kualitas air Kali Surabaya diawali dengan pendiskretan persamaan model penyebaran polutan (pers. 9) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{C_{j,k+1} - C_{j,k}}{\Delta t} &= -\bar{u} \left(\frac{C_{j,k} - C_{j-1,k}}{\Delta l} \right) - \alpha C_{j,k}. \\ C_{j,k+1} &= \left(1 - \alpha \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta l} \bar{u} \right) C_{j,k} + \frac{\Delta t}{\Delta l} \bar{u} C_{j-1,k}. \\ C_{j,k+1} &= \rho C_{j,k} + \beta C_{j-1,k}. \end{aligned} \quad (10)$$

dengan $\rho = (1 - \alpha \Delta t - \frac{\Delta t}{\Delta l} \bar{u})$ dan $\beta = \frac{\Delta t}{\Delta l} \bar{u}$, dan j = segmen sepanjang Kali Surabaya.

Dari persamaan (10) diperoleh ruang keadaan :

$$C_{k+1} = \mathbf{A}C_k + \mathbf{B}u. \quad (11)$$

dengan matriks

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta & \rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta & \rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \rho & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \rho \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta C_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pemantauan terhadap kualitas air dilakukan di sembilan stasiun yang terletak di kilometer ke-2, 7, 17, 26, 30, 33, 35, 39, dan 41. Hal ini berarti pemantauan dilakukan pada $c_2, c_7, c_{17}, c_{26}, c_{30}, c_{33}, c_{35}, c_{39}$, dan c_{41} sehingga di peroleh

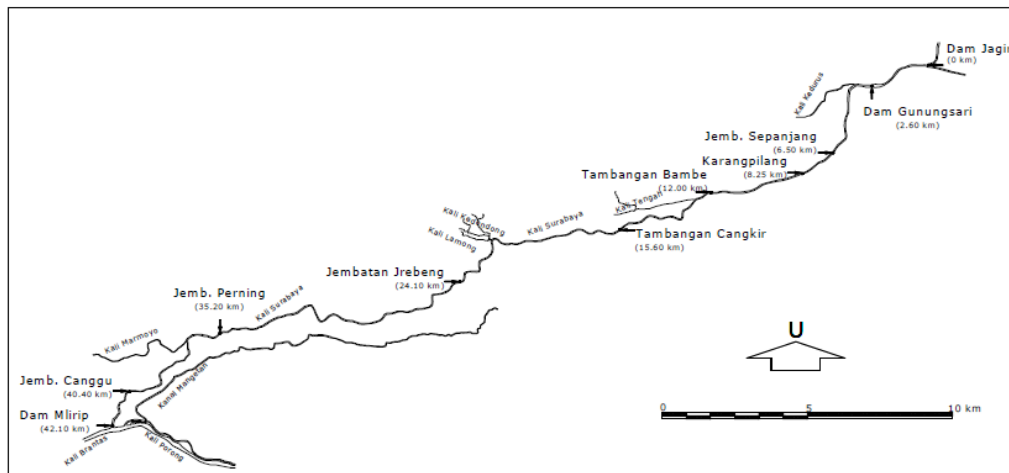
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}^T,$$

dengan $c_2 = 1, c_7 = 1, c_{17} = 1, c_{26} = 1, c_{30} = 1, c_{33} = 1, c_{35} = 1, c_{39} = 1$, dan $c_{41} = 1$ serta $c_i = 0$ untuk yang lain, dan vektor *output* $y(t)$ dapat ditulis sebagai

$$y_k = \mathbf{C}\mathbf{C}_k, \quad (12)$$

dengan $y(t) \in \mathbb{R}$ serta $\mathbf{D} = 0$.

Kali Surabaya melintasi Kota/Kabupaten Mojokerto, Kabupaten Sidoarjo, Kabupaten Gresik, dan Kota Surabaya, yang panjangnya sekitar 42 km mulai dari Dam Mlirip hingga Dam Jagir. Lebar sungai bervariasi 60 hingga 100 meter. Debit di Dam Mlirip bervariasi 7 hingga 70 m³/detik. Di sepanjang Kali Surabaya terdapat sembilan stasiun pemantauan kualitas air, yaitu Canggü, Pening, Jrebeng, Cangkir, Bambe, Karangpilang, Sepanjang, Gunungsari, dan Jagir. Lokasi sembilan stasiun dapat dilihat pada Gambar 2. Pada sembilan stasiun tersebut, Perum Jasa Tirta I selalu melakukan pemantauan kualitas secara rutin tiap bulan, kecuali di Karangpilang dan Jagir yang dipantau tiap minggu. Parameter kualitas air yang dipantau meliputi keasaman (pH), kadar oksigen terlarut (DO), kebutuhan oksigen secara biokimia (BOD), kebutuhan oksigen secara kimiawi (COD), padatan tersuspensi (TSS), kadar nitrat, dan kadar fosfat (Masduqi dan Apriliani, 2008).



Gambar 2. Lokasi sampling kualitas air Kali Surabaya (Masduqi & Apriliani, 2008).

Dengan asumsi $\alpha = 0,40/\text{hari}$ (sama sepanjang sungai), $\bar{u} = 0,4 \text{ m/detik}$ (sama sepanjang sungai), dan $\Delta t = 1$ diperoleh :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0,28 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}^T, \text{ dan } \mathbf{D} = 0.$$

dengan $c_2 = 1$, $c_7 = 1$, $c_{17} = 1$, $c_{26} = 1$, $c_{30} = 1$, $c_{33} = 1$, $c_{35} = 1$, $c_{39} = 1$, dan $c_{41} = 1$ serta $c_i = 0$ untuk $i \neq 2, 7, 17, 26, 30, 33, 35, 39, 41$.

Berdasarkan hasil simulasi dengan menggunakan MATLAB R2009a, didapatkan bahwa sistem $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ yang berorder 42 tersebut merupakan sistem yang stabil asimtotis karena modulus dari semua nilai eigen dari matriks $\mathbf{A}$ kurang dari satu. Selanjutnya, order realisasi minimal dari fungsi transfer $G(z)$ adalah 42. Karena order realisasi minimal dari $G(z)$ dan order dari ruang keadaan adalah sama, maka dapat disimpulkan bahwa realisasi ruang keadaan dari fungsi transfer $G(z)$ merupakan realisasi minimal.

Model tereduksi $(\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_r)$ dari sistem linear diskrit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ yang berorder 42 diperoleh dengan membentuk sistem setimbang $(\mathbf{A}_s, \mathbf{B}_s, \mathbf{C}_s, \mathbf{D}_s)$ dari sistem $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$. Selanjutnya pada sistem setimbang $(\mathbf{A}_s, \mathbf{B}_s, \mathbf{C}_s, \mathbf{D}_s)$ dilakukan reduksi untuk mendapat sistem tereduksi $(\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_r)$.

Jika metode reduksi yang digunakan adalah metode pemotongan setimbang, maka metode ini dilakukan dengan cara memotong variabel pada sistem setimbang $(\mathbf{A}_s, \mathbf{B}_s, \mathbf{C}_s, \mathbf{D}_s)$ yang sulit untuk dikendalikan dan sulit untuk diamati yaitu variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel kecil. Urutan nilai singular Hankel dimulai dari besar sampai kecil, yaitu $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$. Berdasarkan urutan nilai singular Hankel, pemotongan setimbang dapat dilakukan dengan memotong nilai singular Hankel sampai pada urutan ke- r di mana $\sigma_r \geq \sigma_{r+1}$ dan berlaku

$$\|G(z) - G_r(z)\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n).$$

Nilai singular Hankel yang diperoleh dari simulasi adalah : 2.1198e-001 > 1.4230e-001 > 5.4865e-003 > 2.3301e-003 > 8.0705e-004 > 7.5372e-005 > 1.1055e-005 > 2.2898e-006 > 3.4465e-007 > 7.0054e-008 > 1.4787e-008 > 5.5566e-010 > 2.2052e-010 > 1.3201e-010 > 1.1961e-010 > 4.2136e-012 > 7.8719e-013 > 1.1485e-013 > 1.3899e-014 > 4.4166e-015 > 4.0217e-016 > 9.9730e-017 > 4.3331e-017 > 3.5516e-018 > 2.4812e-018 > 4.3521e-019 > 8.1375e-020 > 9.0000e-021 > 8.7301e-022 > 1.7021e-022 > 7.5376e-024 > 2.9406e-024 > 1.7314e-024 > 4.4882e-026 > 5.9224e-027 > 1.4416e-028 > 2.1745e-029 > 3.4987e-030 > 6.1918e-031 > 3.9751e-032 > 3.4672e-033 > 0.

Dengan pemotongan setimbang, $\text{error } \|G(z) - G_r(z)\|_\infty$ dari reduksi model sudah dijamin batas atasnya yaitu $\|G(z) - G_r(z)\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$. Dengan metode LMI, batas atas dari error pada pemotongan setimbang tersebut dapat dicari batas atas terkecil (supremum) nya, dinotasikan dengan γ yang memenuhi $\sigma_{r+1} \leq \|G(z) - G_r(z)\|_\infty < \gamma \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$.

Tabel 1. Perbandingan $\text{error } \|G(z) - G_r(z)\|_\infty$ yang diperoleh dengan metode LMI dan metode pemotongan setimbang.

Order sistem tereduksi	Batas bawah error reduksi	Error reduksi model dengan metode LMI	Error reduksi model dengan metode pemotongan setimbang
r	σ_{r+1}	γ	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$
3	0,0023301	0,0025	0,006452595
5	0,000075372000	0,00008	0,000178294648
7	0,000002289800	0,0000029	0,000005440648

Tabel 1 menunjukkan error reduksi model yang diperoleh dengan metode LMI nilainya jauh lebih kecil dibandingkan dengan error yang diperoleh dengan metode pemotongan setimbang. Selanjutnya juga diperoleh bahwa sistem tereduksi yang diperoleh, baik untuk $r = 3$, $r = 5$, dan $r = 7$ adalah sistem yang stabil, terkendali, dan terobservasi.

4. KESIMPULAN

Diperoleh bahwa *error* reduksi model dengan metode LMI jauh lebih kecil dibandingkan dengan *error* reduksi model dengan metode pemotongan setimbang. Diperoleh juga bahwa sistem tereduksi yang diperoleh adalah sistem yang stabil, terkendali, dan terobservasi.

REFERENSI

- [1] Arif DK, Widodo, Salmah, dan Apriliani E. Construction of the Kalman Filter Algorithm on the Model Reduction. International Journal of Control and Automation. 2014 Vol. 7, No. 9, pp.257–270.
- [2] Ebihara Y, Hagiwara T. On $\mathcal{H}_\infty$ Model Reduction Using LMIs. IEEE Transactions on Automatic Control. 2004, 49: 1187–1191.
- [3] Ebihara Y, Hirai Y, Hagiwara T. On $\mathcal{H}_\infty$ Model Reduction for Discete-Time Linear Time-Invariant Systems Using Linear Matrix Inequalities. Asian Journal of Control. 2008 Vol. 10, No. 3, pp 291–300.
- [4] Grigoriadis KM. Optimal $\mathcal{H}_\infty$ Model Reduction via Linear Matrix Inequalities: Continuous- and Discrete-Time Cases. Systems and Control Letters. 1995, 26: 321–333.
- [5] Khademi G, Mohammadi H, Dehghani M. Order Reduction of Linear Systems With Keeping The Minimum Phase Characteristic of The System: LMI Based Approach. Transaction of Electrical Engineering. 2015 Vol. 39, No. E2, pp 217-227.
- [6] Masduqi A, Apriliani E. Estimation of Surabaya River Water Quality Using Kalman Filter Algorithm. IPTEK, The Journal for Technology and Science. 2008 Vol. 19, No. 3, 87–91.
- [7] Sigurd S. Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. John-Willey and Sons.2001.