

Bilangan Dominasi Jarak-2 Graf Jahangir $J_{n,m}$

Yayuk Wahyuni*, M. Imam Utoyo*, Slamin**

*Departemen Matematika, Universitas Airlangga Surabaya

**Program Studi Sistem Informasi, Universitas Jember

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 15 Mei 2017

Direvisi: 1 Juni 2017

Diterbitkan: 31 Juli 2017

Kata Kunci:

Bilangan dominasi

Bilangan dominasi jarak-2

Himpunan dominasi jarak-2

Graf Jahangir $J_{n,m}$

ABSTRAK

Dalam graf $G = (V, E)$ himpunan $S \subseteq V$ dinamakan himpunan dominasi jarak-2 (*distance-2 dominating set*) jika setiap titik anggota $V - S$ berada dalam jarak 2 dari paling sedikit satu titik dalam S . Kardinalitas minimum diantara himpunan dominasi jarak-2 pada graf G dinamakan bilangan dominasi jarak-2 dari G , dinotasikan dengan $\gamma_{\leq 2}(G)$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan dominasi jarak-2 dari graf Jahangir $J_{n,m}$, dengan menentukan suatu himpunan dominasi jarak-2 dan memperlihatkannya sebagai himpunan dominasi jarak-2 dengan kardinalitas minimum. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa untuk $n = 2$ dan 3 berlaku $\gamma_{\leq 2}(J_{n,m}) = 1$ sedang untuk n yang lain bilangan dominasi jarak-2 $J_{n,m}$ dapat dikelompokkan nilainya dalam tiga kelompok bergantung pada nilai m , semuanya berlaku untuk $m \geq 3$.

Copyright © 2017 SIMANIS.

All rights reserved.

Corresponding Author:

Yayuk Wahyuni,
Departemen Matematika,
Universitas Airlangga Surabaya,
Kampus C, Jl. Mulyorejo Surabaya, Jawa Timur, Indonesia
Email: yayuk-w@fst.unair.ac.id

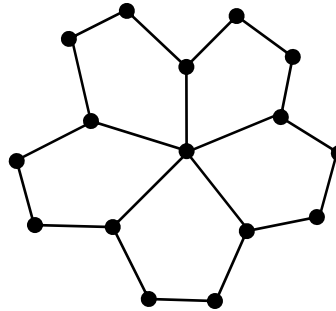
1. PENDAHULUAN

Kajian tentang bilangan dominasi khususnya bilangan dominasi jarak- k telah dilakukan oleh banyak peneliti. Kajian yang telah ada antara lain tentang batas nilai bilangan dominasinya, karakterisasi graf-graf tertentu, sampai algoritma untuk menentukan himpunan dominasi. Terkait batas nilai bilangan dominasi jarak- k , penelitian telah dilakukan antara lain oleh Tian [1] dan Meierling [2] untuk graf pohon, sedangkan Sridharan [3] lebih memfokuskan penelitiannya pada batas atas bilangan dominasi jarak-2 dikaitkan dengan jumlah titik dan derajat tertinggi dari titik pada graphnya dan karakterisasi kelas graf yang bilangan dominasi jarak-2nya memenuhi batasnya. Penelitian bilangan dominasi jarak-2 untuk graf-graf yang dibentuk dari graf lintasan telah pula dilakukan oleh Vaidya [4] sedangkan Prathibha [5] menulis tentang algoritma untuk menentukan himpunan dominasi jarak- t dari graf bintang diperumum (*extended star graph*).

Diberikan graf $G = (V, E)$. Himpunan $S \subseteq V$ dinamakan himpunan dominasi (*dominating set*) jika setiap titik anggota $V - S$ bertetangga dengan paling sedikit satu titik dalam S . Kardinalitas minimum diantara himpunan dominasi pada graf G dinamakan bilangan dominasi dari G , dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Jika konsep bertetangga pada himpunan dominasi diperluas dengan berjarak lebih dari satu, yaitu berjarak dua, maka akan diperoleh konsep yang lebih umum dari himpunan dominasi. Himpunan $S \subseteq V$ dinamakan himpunan dominasi jarak-2 (*distance-2 dominating set*) jika setiap titik anggota $V - S$ berada dalam jarak 2 dari paling sedikit satu titik dalam S . Kardinalitas minimum diantara himpunan dominasi jarak-2 pada graf G dinamakan bilangan dominasi jarak-2 dari G , dinotasikan dengan $\gamma_{\leq 2}(G)$. Tetangga-2 terbuka dari titik $v \in V$, dinotasikan $N_2(v)$ adalah himpunan $N_2(v) = \{u ; u \neq v \text{ dan } d(u,v) \leq 2\}$ dengan $d(u,v)$ menyatakan jarak dari titik u ke titik v . Himpunan $N_2[v] = N_2(v) \cup \{v\}$ dinamakan tetangga-2 tertutup dari titik v . Untuk $S \subseteq V$ didefinisikan pula $N_2(S) = \bigcup_{v \in S} N_2(v)$ dan $N_2[S] = \bigcup_{v \in S} N_2[v]$ berturut-turut sebagai tetangga-2 terbuka dan tetangga-2 tertutup dari himpunan S . Dengan pengertian tetangga-2 ini, dapat dikatakan bahwa S adalah himpunan dominasi jarak-2 jika $N_2[S] = V$ ([6]).

Subdivisi dari suatu graf tidak kosong G adalah graf yang diperoleh dari graf G dengan menghapus suatu garis $e = uv$ dan menambahkan suatu titik baru w dan garis uw dan vw [7]. Untuk keperluan pembuktian dalam tulisan ini didefinisikan jenis subdivisi baru yang menambahkan bukan titik tetapi lintasan. **Subdivisi lintasan** dari suatu graf tidak kosong G adalah graf yang diperoleh dari graf G dengan menghapus suatu garis $e = uv$ dan menambahkan suatu lintasan baru $w - p$ dan garis uw dan vp .

Graf Jahangir $J_{n,m}$ untuk $m \geq 3$ adalah graf pada $nm + 1$ titik yaitu graf yang memuat sebuah siklus C_{nm} dengan tambahan satu titik yang bertetangga dengan m titik dari C_{nm} dimana m titik tersebut masing-masing berjarak n pada C_{nm} ([8]). Contoh graf Jahangir $J_{3,5}$ disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf Jahangir $J_{3,5}$

Graf Jahangir $J_{n,m}$ mempunyai titik sebanyak $|V(J_{n,m})| = nm + 1$ dan garis sebanyak $|E(J_{n,m})| = (n + 1)m$. Di antara titik-titik tersebut satu titik berderajat m , sebanyak m titik berderajat tiga, dan sisanya titik berderajat dua. Untuk mempermudah penyebutan dalam tulisan ini, titik berderajat m disebut titik p , sedang nm titik yang lain disebut titik $v_1, v_2, \dots, v_{nm}$ sedemikian sehingga titik v_1 berderajat tiga. Dengan penyebutan tersebut dapat dimaklumi jika titik-titik berderajat tiga yang lain adalah $v_{n+1}, v_{2n+1}, \dots, v_{(m-1)n+1}$ sedang titik-titik berderajat dua adalah v_{tn+i} untuk $t = 0, 1, \dots, m - 1$ dan $i = 2, 3, \dots, n$.

Beberapa kajian terkait graf Jahangir dan dominasi antara lain bilangan dominasi, dominasi terhubung, dominasi total, dominasi independen, dan dominasi terbatas dari graf Jahangir $J_{2,m}$ oleh Mojdeh [8]. Juga bilangan dominasi medium oleh Ramachandran [9]. Beberapa hasil yang telah ada dan akan digunakan dalam tulisan ini diantaranya sebagai berikut.

Proposisi 1 [10] Jika G graf terhubung dengan diameter d maka $\gamma_{\leq 2}(G) \geq \frac{d+1}{5}$

Proposisi 2 [10] Jika G graf terhubung dengan radius r maka $\gamma_{\leq 2}(G) \geq \frac{2r}{5}$

Proposisi 3 [10] Jika G graf terhubung dengan girth g maka $\gamma_{\leq 2}(G) \geq \frac{g}{5}$

Proposisi 4 [10] Untuk $n \geq 3$ berlaku $\gamma_{\leq 2}(P_n) = \gamma_{\leq 2}(C_n) = \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$

Proposisi 5 [8] Untuk $m \geq 4$, bilangan dominasi graf Jahangir $\gamma(J_{2,m}) = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 1$

2. METODE PENELITIAN

Penelitian dilaksanakan dalam beberapa langkah sebagai berikut:

1. Langkah pertama adalah menentukan bilangan dominasi jarak-2 untuk graf Jahangir $J_{n,m}$ untuk nilai n dan m tertentu, dimulai dari $n = 2, 3, \dots, 15$ dan $m = 3, 4, \dots, 15$.
2. Mengkaji pola bilangan dominasi jarak-2 yang telah diperoleh.
3. Memformulasi nilai bilangan dominasi jarak-2 dari langkah 1 dan 2.
4. Melakukan uji validasi formula pada langkah 3 dengan menentukan nilai bilangan dominasi jarak-2 graf Jahangir dengan nilai n dan m sebarang.
5. Menyusun teorema tentang bilangan dominasi jarak-2 yang telah diperoleh
6. Membuktikan teorema yang telah disusun.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan dibagi dalam dua kelompok, pertama membahas nilai bilangan dominasi jarak-2 untuk graf Jahangir dengan nilai n tertentu sedemikian hingga diperoleh pola yang dapat diperumum untuk semua graf Jahangir. Bagian kedua merupakan perumuman nilai bilangan dominasi jarak-2 untuk semua graf Jahangir.

3.1. Batas Bilangan Dominasi Jarak-2 Graf Jahangir

Dari definisi graf Jahangir $J_{n,m}$ didapat radiusnya adalah $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, diameternya $n + 1$ untuk n ganjil dan $n + 2$ untuk n genap dengan $n > 2$ dan $m > 3$, sedangkan *girth*-nya adalah $n + 2$. Dengan memperhatikan Proposisi 1-3 diperoleh hasil berikut.

Lema 6 Untuk $m \geq 3$, batas bawah bilangan dominasi jarak-2 graf Jahangir $\gamma_{\leq 2}(J_{n,m}) \geq \frac{n+2}{5}$

Oleh karena graf Jahangir terdiri dari graf siklus C_{nm} ditambah satu titik dengan keterhubungan sebagaimana diatur dalam definisi, maka nilai bilangan dominasi jarak-2 tidak melebihi bilangan dominasi jarak-2 subgraf siklusnya.

Lema 7 Untuk $m \geq 3$, batas atas bilangan dominasi jarak-2 graf Jahangir $\gamma_{\leq 2}(J_{n,m}) \leq \left\lceil \frac{nm}{5} \right\rceil$

3.2. Bilangan Dominasi Jarak-2 Graf Jahangir $J_{n,m}$ untuk $2 \leq n \leq 6$

Teorema 8 Untuk $n = 2, 3$, bilangan dominasi jarak-2 graf Jahangir $\gamma_{\leq 2}(J_{n,m}) = 1$.

Bukti. Diambil $S = \{p\}$. Semua titik berderajat tiga bertetangga dengan p , sedang titik berderajat dua mempunyai jarak dua dengan p . Ini menunjukkan bahwa S merupakan himpunan dominasi jarak-2 pada $J_{2,m}$ dan $J_{3,m}$, sekaligus merupakan himpunan dominasi minimum. ♦

Teorema 9 Untuk $n = 4$, bilangan dominasi jarak-2 graf Jahangir $\gamma_{\leq 2}(J_{n,m}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1$.

Bukti. Pembahasan dibagi dalam dua kasus sesuai nilai m .

- a. Untuk m genap, diambil $S = \{p, v_1, v_9, \dots, v_{4(m-2)+1}\}$. Dapat dilihat bahwa titik-titik $v_{4t}, v_{4t+1}, v_{4t+2}$ untuk $t = 1, 3, \dots, m-1$ berada dalam jarak-2 dengan titik p , titik-titik $v_2, v_3, v_{4m}, v_{4m-1}$ berada dalam jarak-2 dengan titik v_1 , dan titik-titik $v_{4t-1}, v_{4t}, v_{4t+2}, v_{4t+3}$ berada dalam jarak 2 dengan v_{4t+1} untuk $t = 2, 4, \dots, m-2$. Ini berarti S merupakan himpunan dominasi jarak-2. Selanjutnya dapat dilihat pula bahwa $|S| = \frac{m-2}{2} + 2 = \frac{m}{2} + 1$.

Andaikan ada S_1 himpunan dominasi jarak-2 dengan $|S_1| \leq \frac{m}{2}$. Dibedakan dua kasus.

Kasus 1. Jika $p \in S_1$. Titik p berjarak satu dengan v_{4t+1} dan berjarak dua dengan v_{4t} dan v_{4t+2} , untuk $t = 0, 1, \dots, m-1$. Sementara titik-titik v_{4t+3} yang ada sebanyak m titik harus didominasi jarak-2 oleh $\frac{m}{2} - 1$ titik lain dari S_1 . Titik-titik ini harus didominasi jarak-2 oleh titik-titik v_i , bukan titik p . Karena titik-titik v_i membentuk siklus C_{4m} maka jumlah titik yang harus mendominasi jarak-2 paling sedikit adalah $\frac{4m}{5}$. Diperoleh kontradiksi, karena $\frac{4m}{5} > \frac{m}{2} - 1$.

Kasus 2. Jika $p \notin S_1$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, diambil $v_1 \in S_1$. Tentu v_1 mendominasi jarak-2 titik p . Dalam hal ini $4m$ titik-titik v_i didominasi jarak-2 oleh $\frac{m}{2}$ titik di antaranya. Hal ini tidak mungkin karena siklus dengan $4m$ titik didominasi jarak-2 oleh paling sedikit $\frac{4m}{5}$ titik, sedangkan $\frac{4m}{5} > \frac{m}{2}$.

- b. Untuk m ganjil, diambil $S = \{p, v_1, v_9, \dots, v_{4(m-3)+1}, v_{4(m-2)+3}\}$. Titik-titik $v_{4t}, v_{4t+1}, v_{4t+2}$ untuk $t = 1, 3, \dots, m-2, m-1$, berada dalam jarak-2 dengan titik p , titik-titik $v_2, v_3, v_{4m}, v_{4m-1}$ berada dalam jarak-2 dengan titik v_1 , dan titik-titik $v_{4t-1}, v_{4t}, v_{4t+2}, v_{4t+3}$ berada dalam jarak 2 dengan v_{4t+1} untuk $t = 2, 4, \dots, m-3$. Dalam hal ini titik $v_{4(m-2)+3}$ berjarak lebih dari dua terhadap titik elemen S yang lain sehingga harus menjadi elemen S . Dengan demikian S membentuk himpunan dominasi jarak-2 dengan $|S| = \frac{m-1}{2} + 2 = \frac{m+1}{2} + 1$.

Andaikan ada S_1 himpunan dominasi jarak-2 dengan $|S_1| \leq \frac{m+1}{2}$. Dibedakan dua kasus.

Kasus 1. Jika $p \in S_1$. Titik p berjarak satu dengan v_{4t+1} dan berjarak dua dengan v_{4m}, v_{4t} dan v_{4t+2} , untuk $t = 0, 1, \dots, m-1$. Sementara titik-titik v_{4t+3} yang ada sebanyak m titik harus didominasi jarak-2 oleh $\frac{m+1}{2} - 1$ titik lain dari S_1 . Titik-titik ini harus didominasi jarak-2 oleh titik-titik v_i , bukan titik p . Jumlah titik yang dapat mendominasi jarak-2 titik-titik tersebut paling sedikit adalah $\frac{4m}{5}$. Diperoleh kontradiksi, karena $\frac{4m}{5} > \frac{m+1}{2} - 1$.

Kasus 2. Jika $p \notin S_1$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, diambil $v_1 \in S_1$. Tentu v_1 mendominasi jarak-2 titik p . Dalam hal ini $4m$ titik-titik v_i didominasi jarak-2 oleh $\frac{m+1}{2}$ titik di antaranya. Hal ini tidak mungkin karena siklus dengan $4m$ titik didominasi jarak-2 oleh paling sedikit $\frac{4m}{5}$ titik, sedangkan $\frac{4m}{5} > \frac{m+1}{2}$. ♦

Teorema 10 Untuk $n = 5$, bilangan dominasi jarak-2 graf Jahangir $\gamma_{\leq 2}(J_{n,m}) = m$.

Bukti. Diambil $S = \{v_1, v_6, \dots, v_{5(m-1)+1}\}$. Titik-titik $v_{5t-1}, v_{5t}, v_{5t+2}, v_{5t+3}$ dan p berada dalam jarak-2 dengan titik v_{5t+1} untuk $t = 1, 2, \dots, m-1$, sementara titik-titik $v_{5m-1}, v_{5m}, v_2, v_3$ berada dalam jarak-2 dengan titik v_1 . Ini berarti S merupakan himpunan dominasi jarak-2 dengan $|S| = m$. Andaikan ada S_1 himpunan dominasi jarak-2 dengan $|S_1| \leq m-1$.

Kasus 1. Jika $p \in S_1$. Titik p berjarak satu dengan v_{5t+1} untuk $t = 0, 1, \dots, m-1$ dan berjarak dua dengan v_2, v_{5m}, v_{5t} dan v_{5t+2} , untuk $t = 1, 2, \dots, m-1$. Sementara pasangan titik bertetangga v_{5t-2} dan v_{5t-3} untuk $t = 1, 2, \dots, m$ harus didominasi jarak-2 oleh $m-2$ titik lain dari S_1 . Jarak antar pasang titik adalah lima sedang banyaknya pasangan titik bertetangga v_{5t-2} dan v_{5t-3} adalah m pasang sehingga tidak mungkin titik-titik ini didominasi jarak-2 oleh $m-2$ titik diantaranya. Akibatnya timbul kontradiksi.

Kasus 2. Jika $p \notin S_1$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, diambil $v_1 \in S_1$. Tentu v_1 mendominasi jarak-2 titik p . Dalam hal ini $5m$ titik-titik v_i didominasi jarak-2 oleh $m-1$ titik di antaranya. Oleh karena $5m$ titik ini membentuk subgraf siklus C_{5m} maka titik-titik ini didominasi jarak-2 oleh paling sedikit m titik sehingga timbul kontradiksi. ♦

Teorema 11 Untuk $n = 6$, bilangan dominasi jarak-2 graf Jahangir $\gamma_{\leq 2}(J_{n,m}) = m+1$

Bukti. Diambil $S = \{p, v_4, v_{10}, \dots, v_{\frac{(2m-1)n}{2}+1}\}$. Jelas bahwa titik-titik v_1, v_2, v_{4m} dan $v_{4t}, v_{4t+1}, v_{4t+2}$ untuk $t = 1, 2, \dots, m-1$ didominasi jarak-2 oleh titik p , sedangkan titik-titik lainnya beretangga dengan titik v_{6t-2} , untuk $t = 1, 2, \dots, m$. Ini berarti S merupakan himpunan dominasi jarak-2 dengan $|S| = m+1$. Andaikan ada S_1 himpunan dominasi jarak-2 dengan $|S_1| \leq m$.

Kasus 1. Jika $p \in S_1$. Titik p berjarak satu dengan v_{6t+1} untuk $t = 0, 1, \dots, m-1$ dan berjarak dua dengan v_2, v_{6m}, v_{6t} dan v_{6t+2} , untuk $t = 1, 2, \dots, m-1$. Sementara titik-titik yang lain harus didominasi jarak-2 oleh $m-1$ titik lain dari S_1 . Titik-titik ini membentuk m kelompok titik yang masing-masing merupakan lintasan dengan panjang tiga dan jarak antar lintasan adalah empat. Hal ini menyebabkan harus ada elemen S_1 pada masing-masing lintasan. Dengan demikian m kelompok lintasan tersebut harus didominasi oleh m titik elemen S_1 . Terjadi kontradiksi.

Kasus 2. Jika $p \notin S_1$. Tanpa mengurangi keumuman bukti, diambil $v_1 \in S_1$. Tentu v_1 mendominasi jarak-2 titik p . Dalam hal ini $6m$ titik-titik v_i didominasi jarak-2 oleh m titik di antaranya. Oleh karena $6m$ titik ini membentuk subgraf siklus C_{6m} maka titik-titik ini didominasi jarak-2 oleh paling sedikit $\frac{6m}{5}$ titik sehingga timbul kontradiksi. ♦

3.3. Bilangan Dominasi Jarak-2 Graf Jahangir $J_{n,m}$

Teorema 12 Untuk $m \geq 3$ berlaku $\gamma_{\leq 2}(J_{n+5,m}) = \gamma_{\leq 2}(J_{n,m}) + m$.

Bukti. Graf Jahangir $J_{n+5,m}$ adalah subdivisi lintasan dari graf Jahangir $J_{n,m}$ dengan penambahan lintasan panjang lima pada satu garis yang salah satu atau kedua titiknya berderajat dua. Penambahan ini terjadi pada setiap subgraf lintasan $v_{(t-1)n+1} - v_{tn+1}$ untuk $t = 1, 2, \dots, m$. Menurut Proposisi 4, lintasan dengan panjang lima mempunyai bilangan dominasi jarak-2 bernilai 1. Oleh karena penambahan lintasan dengan panjang lima terjadi pada m subgraf lintasan $v_{(t-1)n+1} - v_{tn+1}$ maka penambahan bilangan dominasi jarak-2 graf $J_{n+5,m}$ dari bilangan dominasi jarak-2 graf $J_{n,m}$ adalah m . ♦

Teorema 12 bersama Teorema 8-11 di atas dapat digunakan untuk menentukan nilai bilangan dominasi jarak-2 graf Jahangir secara umum. Dengan demikian didapatkan rumusan nilai bilangan dominasi jarak-2 untuk graf Jahangir $J_{n,m}$ seperti di bawah ini. Perlu dicatat bahwa graf $J_{1,m}$ tidak lain adalah graf roda yang bilangan dominasinya satu, tentu saja bilangan dominasi jarak-2nya juga bernilai satu.

Akibat 13 Untuk $m \geq 3$, bilangan dominasi jarak-2 graf Jahangir $J_{n,m}$ adalah

$$\gamma_{\leq 2}(J_{n,m}) = \begin{cases} km, & \text{jika } n = 5k, \text{ dengan } k = 1, 2, \dots \\ km + 1, & \text{jika } n = 5k + t, \text{ dengan } k = 0, 1, 2, \dots \text{ dan } t = 1, 2, 3 \\ \left\lceil \frac{(2k+1)m}{2} \right\rceil + 1, & \text{jika } n = 5k + 4, \text{ dengan } k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

4. KESIMPULAN

Pembahasan di atas menunjukkan bahwa nilai bilangan dominasi jarak-2 graf Jahangir $J_{n,m}$ bersifat periodik dengan periode lima. Terdapat tiga kelompok nilai bilangan dominasi jarak-2 graf Jahangir $J_{n,m}$ yang semuanya bergantung pada nilai m kecuali untuk $n = 1, 2, 3$. Hasil tersebut dapat dikembangkan lebih lanjut untuk jenis dominasi yang lain maupun untuk jenis graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] F. Tian and J.-M. Xu, "A note on distance domination numbers of graphs," *Australas. J. Combin.*, vol. 43, pp. 181-190, 2009.
- [2] D. Meierling and L. Volkmann, "A lower bound for the distance k-domination number of trees," *Results in Mathematics*, vol. 47, pp. 335-339, 2005.
- [3] N. Sridharan, V. S. A. Subramanian and M. D. Elias, "Bounds on the distance two-domination number of a graph," *Graphs and Combinatorics*, vol. 18, pp. 667-675, 2002.
- [4] S. K. Vaidya and N. J. Kothari, "Distance k-domination of some path related graphs," *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, vol. 4, pp. 1-5, 2014.
- [5] E. Prathibha, S. P. Missier and A. A. Kinsley, "Algorithms to Determine the Distance-t Dominating Sets of $ES(n, k)$," *Procedia Computer Science*, vol. 47, pp. 342-350, 2015.
- [6] T. W. Haynes, S. Hedetniemi and P. Slater, *Fundamentals of domination in graphs*, CRC Press, 1998.
- [7] G. Chartrand, "Dan Lesniak, L. 1996," *Graph and Digraph*.
- [8] D. A. Mojdeh and A. N. Ghameshlou, "Domination in Jahangir graph J_2, m ," *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, vol. 2, pp. 1193-1199, 2007.
- [9] M. Ramachandran and N. Parvathi, "The Medium Domination Number of a Jahangir Graph J_m, n ," *Indian Journal of Science and Technology*, vol. 8, pp. 400-406, 2015.
- [10] R. Davila, C. Fast, M. Henning and F. Kenter, "Lower bounds on the distance domination number of a graph," *arXiv preprint arXiv:1507.08745*, 2015.