

## Karakterisasi Dekomposisi Modul yang Dibangun secara Hingga atas Daerah Valuasi

Dwi Mifta Mahanani

Departement Matematika, Universitas Brawijaya Malang

Email: mdwimifta@yahoo.com

| Info Artikel                                                                                                                                                                                      | ABSTRACT                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Riwayat Artikel:</b><br>Diterima: 15 Mei 2017<br>Direvisi: 1 Juni 2017<br>Diterbitkan: 31 Juli 2017                                                                                            | Tulisan ini membahas tentang karakterisasi dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah valuasi. Ada beberapa konsep yang diperlukan untuk mengetahui kapan modul yang dibangun secara hingga dapat didekomposisikan. Konsep-konsep tersebut mengenai deret komposisi $RD$ dan dimensi Goldie. Oleh karena itu, akan dibahas pula deret komposisi $RD$ dan dimensi Goldie dari modul yang dibangun secara hingga atas daerah valuasi. Akan ditunjukkan bahwa modul yang dibangun secara hingga atas daerah valuasi dapat didekomposisikan menjadi tambah langsung submodul-submodul siklis jika dan hanya jika panjang deret komposisi $RD$ nya sama dengan dimensi Goldienya. |
| <b>Kata Kunci</b><br>Deret komposisi $RD$<br>Dimensi Goldie<br>Panjang deret komposisi $RD$                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Copyright © 2017 SIMANIS.<br>All rights reserved.                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Korespondensi:</b><br>Dwi Mifta Maharani,<br>Departemen Matematika,<br>Univesitas Brawijaya<br>Email: <a href="mailto:nendensitinurkholipah@yahoo.co.id">nendensitinurkholipah@yahoo.co.id</a> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

### 1. INTRODUCTION

Daerah valuasi didefinisikan dengan melihat keberadaan unsur tak-nol dari lapangan hasil baginya. Definisi daerah valuasi ini erat kaitannya dengan pemetaan valuasi pada suatu lapangan. Ada beberapa karakteristik dari daerah valuasi. Karakteristik tersebut dilihat berdasarkan urutan dua idealnya berdasarkan subhimpunan. Selain itu, terdapat pula sifat daerah valuasi yang terkait dengan ideal maksimalnya.

Secara ringkas, modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama dapat didekomposisikan menjadi tambah langsung submodul-submodul siklis. Dengan melihat adanya fenomena tersebut, konsep pendekomposisian modul yang dibangun secara hingga berkembang pada modul yang dibangun secara hingga atas daerah valuasi. Daerah valuasi bukan generalisasi dari daerah ideal utama. Oleh karena itu konsep pendekomposisian dari modul yang dibangun secara hingga atas daerah valuasi sangatlah jauh berbeda dengan modul yang dibangun secara hingga atas daerah ideal utama. Pada tulisan ini, penulis akan membahas dekomposisi modul atas daerah valuasi. Khususnya, akan dilihat kapan suatu modul yang dibangun secara hingga atas daerah valuasi dapat didekomposisikan menjadi tambah langsung submodul-submodul siklis.

Secara umum, teorema yang disajikan pada tulisan ini adalah hasil kajian pustaka dan bukan merupakan hasil baru. Pustaka utama yang digunakan adalah *Finitely Generated Module over Valuation Ring* yang ditulis oleh L. Salce dan P. Zanardo dan diterbitkan oleh *Communication in Algebra* pada tahun 1984. Pustaka utama lainnya adalah *Module over Valuation Domain* yang ditulis oleh L. Fuchs dan L. Salce yang diterbitkan oleh Marcel Dekker pada tahun 1985. Namun demikian alur penulisan dan pembuktian sifat-sifat disusun untuk mencapai tujuan di atas dan menjadikan tulisan ini *self-contained*.

### 2. TINJAUAN PUSTAKA

Metode penelitian yang digunakan pada tulisan ini merupakan *study literature*. Secara umum, teorema yang disajikan pada tulisan ini adalah hasil kajian pustaka dan bukan merupakan hasil baru. Pustaka utama yang digunakan adalah *Finitely Generated Module over Valuation Ring* yang ditulis oleh L. Salce dan P. Zanardo dan diterbitkan oleh Communication in Algebra pada tahun 1984. Pustaka utama lainnya adalah *Module over Valuation Domain* yang ditulis oleh L. Fuchs dan L. Salce yang diterbitkan oleh Marcel Dekker pada tahun 1985. Namun demikian alur penulisan dan pembuktian sifat-sifat disusun untuk mencapai tujuan di atas dan menjadikan tulisan ini *self-contained*.

### 3. HASIL DAN ANALISIS

Secara umum, modul yang dibangun secara hingga atas daerah valuasi tidak dapat didekomposisikan menjadi tambah langsung submodul-submodul siklis. Contoh dari pernyataan ini dapat dilihat pada [7]. Sedangkan untuk modul yang dibangun secara hingga atas daerah valuasi yang dapat didekomposisikan menjadi tambah langsung submodul-submodul siklis dapat dilihat pada pembahasan di bawah.

#### 3.1. Daerah Valuasi

##### Karakterisasi Daerah Valuasi

Misalkan  $R$  daerah integral. Pernyataan berikut ekuivalen.

- Gelanggang  $R$  adalah daerah valuasi.
- Jika  $I$  dan  $J$  adalah sebarang ideal dari  $R$  maka berlaku bahwa  $I \subseteq J$  atau  $J \subseteq I$ .
- Jika  $a, b \in R$  maka berlaku  $Ra \subseteq Rb$  atau  $Rb \subseteq Ra$ .

##### Contoh Daerah Valuasi

Berikut akan diberikan beberapa contoh daerah valuasi.

- Setiap lapangan merupakan daerah valuasi.
- Misalkan  $p$  bilangan prima di  $\mathbb{Z}$ . Daerah integral  $R = \left\{ p^r \frac{m}{n} \mid r \geq 0, p \nmid m, p \nmid n \right\}$  merupakan daerah valuasi.
- Misalkan  $K$  lapangan dan  $K[x]$  polinomial atas  $K$ . Tulis

$$F = \left\{ \frac{a(x)}{b(x)} \mid a(x), b(x) \in K[x], b(x) \neq 0 \right\}.$$

Perhatikan bahwa

$$K = \left\{ \frac{a(x)}{b(x)} \in F \mid a(x) = 0 \text{ atau } \deg(a(x)) \leq \deg(b(x)) \right\}.$$

##### Definisi Submodul $RD$

Submodul  $N$  dari  $R$ -modul  $M$  disebut *relatively divisible*, disingkat  $RD$ , dari  $M$  jika  $rN = N \cap rM$  untuk setiap  $r \in R$ .

##### Contoh Submodul $RD$

- Setiap subruang dari suatu ruang vektor  $V$  merupakan submodul  $RD$  dari vektor  $V$ .
- Pandang  $\mathbb{Z}_{10}$  sebagai  $\mathbb{Z}$ -modul. Submodul  $\mathbb{Z}2$  dan  $\mathbb{Z}5$  merupakan submodul  $RD$  dari  $\mathbb{Z}_{10}$ .

##### Sifat-Sifat Submodul $RD$

Misalkan  $M$  merupakan  $R$ -modul dan  $L, N$  merupakan  $R$ -submodul dari  $M$ . Pernyataan berikut berlaku.

- Suku tambah langsung dari  $M$  merupakan submodul  $RD$ .
- Relative divisibility* bersifat transitif, yaitu jika  $L$  adalah submodul  $RD$  dari  $N$  dan  $N$  merupakan submodul  $RD$  dari  $M$ , maka  $L$  merupakan submodul  $RD$  dari  $M$ .

### 3.2. Deret Komposisi $RD$

##### Definisi Deret Komposisi $RD$

Misalkan  $M$  adalah  $R$ -modul. *Deret komposisi  $RD$*  dari  $M$  adalah deret submodul  $RD$  dari  $M$

$$0 = M_0 < M_1 < \dots < M_{n-1} < M_n = M.$$

Deret tersebut dinamakan deret komposisi  $RD$  dengan faktor siklis jika  $M_i/M_{i-1}$  merupakan modul siklis dengan  $i = 1, \dots, n$ .

Barisan ideal  $A_i = \text{Ann}(M_i/M_{i-1})$  disebut *barisan pembuat nol* dari  $M$ .

### Eksistensi Deret Komposisi $RD$ dari Modul yang Dibangun secara Hingga atas Daerah Valuasi

Misalkan  $M$  adalah  $R$ -modul yang dibangun secara hingga. Terdapat rantai hingga submodul dari  $M$

$$0 = M_0 < M_1 < \dots < M_{n-1} < M_n = M$$

sehingga

- setiap  $M_i$  merupakan submodul  $RD$  dari  $M$ ,
- faktor modul  $M_i/M_{i-1}$  siklis untuk  $i = 1, \dots, n-1$ .

Lebih lanjut rantai di atas dapat dipilih sehingga

$$\text{Ann}(M) = \text{Ann}(M_1) \leq \text{Ann}\left(\frac{M_2}{M_1}\right) \leq \dots \leq \text{Ann}\left(\frac{M_n}{M_{n-1}}\right).$$

### Sifat Deret Komposisi $RD$ dari Modul yang Dibangun secara Hingga atas Daerah Valuasi

1. Panjang dari deret komposisi  $RD$

$$0 < M_0 < M_1 < \dots < M_{n-1} < M_n = M$$

Dari  $R$ -modul yang dibangun secara hingga  $M$  sama dengan  $\text{gen}(M)$ .

## 3.3. Dimensi Goldie

### Definisi Dimensi Goldie

Misalkan  $M$  merupakan  $R$ -modul. Tulis

$$\mathcal{A} = \{|I| \mid \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha, 0 \neq M_\alpha \leq M\}.$$

Supremum dari  $\mathcal{A}$  disebut *dimensi Goldie* dari  $M$  dan dinotasikan dengan  $g(M)$ .

### Contoh Dimensi Goldie

Berikut akan diberikan beberapa contoh dimensi Goldie dari suatu modul.

- a) Pandang  $\mathbb{Z}$  sebagai  $\mathbb{Z}$ -modul. Misalkan  $\mathbb{Z}a$  dan  $\mathbb{Z}b$  merupakan ideal tak-nol dari  $\mathbb{Z}$ . Perhatikan bahwa  $\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b = \mathbb{Z}c \neq 0$  dengan  $c$  merupakan kelipatan persekutuan terkecil dari  $a$  dan  $b$ . Oleh karena itu dimensi Goldie dari  $\mathbb{Z}$  sebagai  $\mathbb{Z}$ -modul adalah satu.
- b) Pandang  $R$  sebagai  $R$  modul siklis dengan  $R$  merupakan daerah valuasi. Setiap dua submodul tak-nol dari  $R$  dapat dibandingkan. Dengan demikian  $g(R) = 1$ .
- c) Misalkan  $\mathbb{Z}_6$  adalah  $\mathbb{Z}$ -modul. Perhatikan bahwa  $g(\mathbb{Z}_6) = 2$ .

### Sifat Dimensi Goldie

1. Jika  $N$  merupakan  $R$ -submodul dari  $M$ , maka  $g(N) \leq g(M)$ .

## 3.4. Submodul Prebasic

### Definisi Submodul Prebasic

Submodul  $B$  dari  $R$ -modul yang dibangun secara hingga  $M$  disebut submodul **prebasic** dari  $M$  jika memenuhi kondisi berikut.

1. Submodul  $B$  merupakan tambah langsung dari submodul-submodul siklis.
2. Submodul  $B$  merupakan submodul  $RD$  dari  $M$ .
3. Jika  $x \in M$  dengan  $x \neq 0$  maka berlaku  $B \cap Rx \neq 0$  atau  $B + Rx$  bukan submodul  $RD$  dari  $M$ .

Dengan menggunakan lema *Zorn*, setiap modul yang dibangun secara hingga atas daerah valuasi dapat dibuktikan selalu memiliki submodul *prebasic*.

**Sifat Submodul Prebasic**

1. Jika  $M$  merupakan  $R$ -modul yang dibangun secara hingga, maka terdapat submodul *prebasic*  $B$  sehingga  $g(B) = g(M)$ .

**4. KESIMPULAN**

Berikut merupakan karakterisasi dekomposisi modul yang dibangun secara hingga atas daerah valuasi. Modul  $M$  yang dibangun secara hingga atas daerah valuasi  $R$  dapat didekomposisikan menjadi tambah langsung submodul-submodul siklis jika dan hanya jika dimensi Goldienya ( $g(M)$ ) sama dengan panjang deret komposisi  $RD$ nya ( $l(M)$ ). Bukti karakterisasi tersebut akan disajikan berikut.

- ( $\Rightarrow$ ) Misalkan  $M = Rx_1 \oplus Rx_2 \oplus \dots \oplus Rx_n$ . Karena suku langsung dari  $M$  merupakan submodul  $RD$  dari  $M$ , maka barisan

$$0 < Rx_1 < \bigoplus_{i=1}^2 Rx_i < \dots < \bigoplus_{i=1}^n Rx_i = M$$

merupakan deret komposisi  $RD$  dari  $M$  dengan  $l(M) = n = g(M)$ .

- ( $\Leftarrow$ ) Misalkan  $g(M) = l(M)$ . Maka terdapat submodul *prebasic*  $B$  sehingga  $g(B) = g(M)$ . Perhatikan bahwa  $g(B) = g(M) = l(M) < \infty$ . Ini berarti,  $B$  merupakan  $R$ -modul yang dibangun secara hingga. Andaikan  $B < M$ . Maka berlaku  $gen(B) < gen(M)$ . Perhatikan bahwa  $l(B) = gen(B) \leq g(B)$ . Diperoleh  $g(B) \leq l(B) = gen(B)$ . Akibatnya,  $g(B) = gen(B)$ . Perhatikan bahwa

$$gen(B) < gen(M)$$

$$g(B) < l(M) = g(M).$$

Hal ini kontradiksi dengan  $g(M) = g(B)$ . Jadi pengandaian salah. Dengan demikian, diperoleh bahwa  $B = M$ .

**REFERENSI**

- [1] Adkins, A.A and Weintraub, S.H. 1992. *Algebra An Approach via Module Theory*. Springer-Verlag.
- [2] Fuchs, Laszlo and Salce, Luigi. 1985. *Modules over Valuation Domains*. New York and Basel: Marcel Dekker, Inc.
- [3] Fuchs, Laszlo and Salce, Luigi. 2001. *Modules over Non-Noetherian Domains*. Rhode-Island: American Mathematical Society.
- [4] Larsen, M.D and McCarthy, P.J. 1971. *Multiplicative Theory of Ideals*. New York and London: Academic Press.
- [5] Matsumura, Hideyuki. *Commutative Ring Theory*. Cambridge University Press.
- [6] Nuraida, Ida. 2011. *Gelanggang Valuasi*. Proyek Magister Pengajaran Matematika. Institut Teknologi Bandung.
- [7] Salce, Luigi and Zanardo, Paolo. 1984. *Finitely Generated Modules over Valuation Ring*. Comm. Algebra. **12:15**, 1795-1812.