

Graf Koset dari Subgrup Normal pada Grup Dihedral

Evawati Alisah*, Risna Zulfa Musriroh*

* Jurusan Matematika, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Email: eva.alisah@gmail.com, risnazulfa@gmail.com

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 1 Oktober 2018

Direvisi: 1 November 2018

Diterbitkan: 1 Desember 2018

Kata Kunci:

Graf
Graf Koset
Subgrup Normal
Grup Dihedral

ABSTRAK

Graf didefinisikan sebagai suatu himpunan titik $V(G)$ yang tidak kosong dan himpunan sisi $E(G)$ yang mungkin kosong. Graf koset adalah salah satu graf dengan setiap titik pada graf adalah himpunan koset kanan dari suatu subgrup H di suatu grup P , dua koset Hx dan Hy akan terhubung oleh sisi berarah dari Hx ke Hy jika dan hanya jika $yx^{-1} \in HSH$ dengan S adalah subhimpunan dari P dan dinotasikan dengan $\Gamma(P, H, HSH)$. Grup dihedral- $2n$ adalah suatu grup yang anggotanya terdiri dari simetri-simetri pada segi n beraturan yang memuat rotasi dan refleksi dan dinyatakan dengan $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Penelitian itu bertujuan untuk menentukan karakteristik graf koset dari subgrup normal pada grup dihedral. Selanjutnya, subgrup normal pada grup dihedral- $2n$ di antaranya $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$, $\{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ untuk $d|n$, D_{2n} dan tambahan untuk n genap $\{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, sr^4, \dots, sr^{n-2}\}$ dan $\{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, sr^5, \dots, sr^{n-1}\}$. Pembahasan dalam penelitian ini dibatasi pada subhimpunan $\{s\}$, $\{r\}$, dan $\{1\}$ dengan mengkaji grup D_6 sampai D_{16} untuk menentukan karakteristik graf koset pada D_{2n} . Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh graf koset dari D_{2n} terhadap subgrup normal H dan subhimpunan S jika $H \circ S \circ H \neq H$ dan banyak kosetnya adalah 2 maka graf $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$ adalah digraf sikel berorder 2. Jika $H \circ S \circ H \neq H$ dengan $H = \{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ untuk $S = \{s\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$ adalah digraf yang memuat d sikel berorder 2 sedangkan untuk $S = \{r\}$ maka $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$ adalah digraf yang memuat 2 sikel berorder d . Dan jika $H \circ S \circ H = H$ maka membentuk digraf nol. Kemudian semua titik pada graf $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$ dengan $H \circ S \circ H \neq H$ adalah berderajat dua. Bagi penelitian selanjutnya diharapkan untuk membahas graf koset dari subgrup normal dan semua subhimpunan pada grup dihedral beserta teorema-teorema lain tentang graf koset.

Copyright © 2018 SIMANIS.
All rights reserved.

Korespondensi:

Evawati Alisah,
Jurusan Matematika,
UIN Maulana Malik Ibrahim Malang,
Jl. Gajayana No. 50 Malang, Jawa Timur, Indonesia 65144
eva.alisah@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Graf didefinisikan dalam himpunan titik $V(G)$ yang tidak kosong dan himpunan garis atau sisi $E(G)$ yang mungkin kosong. Dan grup $(P, *)$ merupakan suatu himpunan tak kosong P dengan operasi biner $*$ yang memenuhi tiga aksioma yaitu operasi $*$ bersifat asosiatif di P , mempunyai unsur identitas terhadap operasi $*$, dan setiap unsur di P mempunyai invers terhadap operasi $*$. Selanjutnya subhimpunan H di P adalah subgrup dari P jika H tak kosong dan H tertutup terhadap operasi dan invers.

Koset merupakan salah satu kajian ilmu tentang teori grup. Untuk setiap $x \in P$, himpunan $xH = \{xh | h \in H\}$ merupakan koset kiri dari H dan $Hx = \{hx | h \in H\}$ adalah koset kanan dari H . Subgrup H disebut

normal jika dan hanya jika $x * H = H * x$ untuk setiap $x \in P$. Kemudian dibentuk graf koset dari suatu subgrup H di grup P dan untuk dua buah koset Hx dan Hy akan terhubung oleh sisi berarah dari Hx ke Hy jika dan hanya jika $yx^{-1} \in HSH$ dengan S adalah suatu subhimpunan di P [1].

Grup dihedral- $2n$ (D_{2n}) adalah salah satu grup dalam aljabar yang anggotanya simetri-simetri dari poligon- n . Artinya suatu poligon- n dapat menempati bingkai simetri kembali dari komposisi rotasi yang (r) dan refleksi (s). Terdapat subgrup normal di D_{2n} yaitu $\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$, $\{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ untuk $d|n$, D_{2n} dan saat n genap adalah $\{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, sr^4, \dots, sr^{n-2}\}$ dan $\{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, sr^5, \dots, sr^{n-1}\}$ [2].

Penelitian ini membahas tentang graf koset secara umum dengan memadukan teori grup dan graf yang difokuskan pada analisis subgrup normal dengan sifat koset kiri sama dengan koset kanan. Kemudian graf koset dapat membentuk pola sisi berarah dan derajat titik pada graf. Gagasan graf koset yang dari penelitian Muftirridha [3] dengan merujuk pada definisi graf koset Schneider [1] sehingga penelitian ini mengambil tema "Graf Koset dari Subgrup Normal pada Grup Dihedral".

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1. Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal $H_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$

Teorema 1

Diberikan grup D_{2n} untuk setiap n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. $H_1 = \{r^i | 1 \leq i < n\}$ adalah subgrup normal dan S adalah suatu subhimpunan dari D_{2n} .

- Jika $S = \{s\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$ adalah digraf sikel berorder 2.
- Jika $S = \{r\}$ atau $S = \{1\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$ adalah digraf nol berorder 2.

Bukti:

Diketahui $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dan $H_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$. Menurut teorema Lagrange, banyak koset dari H_1 di D_{2n} adalah $\frac{2n}{n} = 2$ koset yaitu $H_1 = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\} = H_1 \circ r^i$ dan $\{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\} = H_1 \circ sr^j$ sebarang i dan j . Sehingga $\{H_1 \circ r^i, H_1 \circ sr^j\}$ untuk suatu $1 \leq i, j < n$ merupakan himpunan titik pada graf kosetnya.

- Ambil $S = \{s\}$ sehingga $H_1 \circ S \circ H_1 = \{s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Karena $sr^j \circ (r^i)^{-1} = sr^{j+n-i} \in H_1 \circ S \circ H_1$ maka terdapat sisi berarah dari $H_1 \circ r^i$ ke $H_1 \circ sr^j$. Sebaliknya $r^i \circ (sr^j)^{-1} = sr^{n-i+j} \in H_1 \circ S \circ H_1$ maka terdapat sisi berarah dari $H_1 \circ sr^j$ ke $H_1 \circ r^i$. Terbukti bahwa jika $S = \{s\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$ adalah digraf sikel berorder 2.
- Ambil $S = \{r\}$ sehingga $H_1 \circ S \circ H_1 = H_1$. Karena $sr^j \circ (r^i)^{-1} = sr^{j+n-i} \notin H_1$ maka tidak terdapat sisi berarah dari $H_1 \circ r^i$ ke $H_1 \circ sr^j$. Sebaliknya karena $r^i \circ (sr^j)^{-1} = sr^{n-i+j} \notin H_1$ maka tidak terdapat sisi berarah dari $H_1 \circ sr^j$ ke $H_1 \circ r^i$. Begitu pula untuk $S = \{1\}$ sehingga $H_1 \circ S \circ H_1 = H_1$. Jadi, jika $S = \{r\}$ atau $S = \{1\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$ adalah digraf nol berorder 2.

Akibat 1

Graf $\Gamma(D_{2n}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$ dengan $H_1 = \{r^i | 1 \leq i < n\}$ dan $S = \{s\}$ hanya memiliki dua titik yang masing-masing berderajat dua.

Bukti:

Berdasarkan bukti pada teorema 1 terdapat sisi berarah dari titik $H_1 \circ r^i$ ke titik $H_1 \circ sr^j$ sehingga $od(H_1 \circ r^i) = 1$ dan $id(H_1 \circ sr^j) = 1$. Dan terdapat sisi berarah dari $H_1 \circ sr^j$ ke $H_1 \circ r^i$ sehingga $od(H_1 \circ sr^j) = 1$ dan $id(H_1 \circ r^i) = 1$.

Jadi $\deg(H_1 \circ r^i) = od(H_1 \circ r^i) + id(H_1 \circ r^i) = 1 + 1 = 2$, begitu pula

$\deg(H_1 \circ sr^j) = od(H_1 \circ sr^j) + id(H_1 \circ sr^j) = 1 + 1 = 2$.

2.2. Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal $H_2 = \{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}\}$

Teorema 2

Diberikan grup D_{2n} dengan n genap dan $n \geq 4$. $H_2 = \{r^{2i} | 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\}$ adalah subgrup normal dan S adalah suatu subhimpunan dari D_{2n} .

- Jika $S = \{s\}$ atau $S = \{r\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$ adalah digraf yang memuat 2 sikel berorder 2.
- Jika $S = \{1\}$ maka $\Gamma(D_{2n}, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$ adalah digraf nol berorder 4.

Bukti:

Diketahui $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dan $H_2 = \{r^{2i} | 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\}$.

Menurut teorema Lagrange, banyak koset dari H_2 di D_{2n} adalah $\frac{2n}{2} = n$ koset yaitu $\{r, r^3, \dots, r^{n-1}\} = H_2 \circ r^{2i+1}, \{s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\} = H_2 \circ sr^{2i}, \{sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\} = H_2 \circ sr^{2i+1}$ sebarang i . Sehingga $\{H_2 \circ r^{2i}, H_2 \circ r^{2i+1}, H_2 \circ sr^{2i}, H_2 \circ sr^{2i+1}\}$ untuk suatu $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ merupakan himpunan titik pada graf kosetnya.

- i) Ambil $S = \{s\}$ sehingga $H_2 \circ S \circ H_2 = \{s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$. $sr^{2i} \circ (r^{2i})^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ maka terdapat sisi berarah dari titik $H_2 \circ r^{2i}$ ke $H_2 \circ sr^{2i}$. Sebaliknya $r^{2i} \circ (sr^{2i})^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ maka terdapat sisi berarah dari titik $H_2 \circ sr^{2i}$ ke $H_2 \circ r^{2i}$. Selanjutnya $sr^{2i+1} \circ (r^{2i+1})^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ maka terdapat sisi berarah dari titik $H_2 \circ r^{2i+1}$ ke $H_2 \circ sr^{2i+1}$. Sebaliknya $r^{2i+1} \circ (sr^{2i+1})^{-1} = s \in H_2 \circ S \circ H_2$ maka terdapat sisi berarah dari titik $H_2 \circ sr^{2i+1}$ ke $H_2 \circ r^{2i+1}$. Begitu pula saat $S = \{r\}$ sehingga $H_2 \circ S \circ H_2 = \{r, r^3, \dots, r^{n-1}\}$. $r^{2i+1} \circ (r^{2i})^{-1} = r \in H_2 \circ S \circ H_2$ maka terdapat sisi berarah dari titik $H_2 \circ r^{2i}$ ke $H_2 \circ r^{2i+1}$. Sebaliknya $r^{2i} \circ (r^{2i+1})^{-1} = r^{n-1} \in H_2 \circ S \circ H_2$ maka terdapat sisi berarah dari titik $H_2 \circ r^{2i+1}$ ke $H_2 \circ r^{2i}$. Selanjutnya $sr^{2i+1} \circ (sr^{2i})^{-1} = r^{n-1} \in H_2 \circ S \circ H_2$ maka terdapat sisi berarah dari titik $H_2 \circ sr^{2i}$ ke $H_2 \circ sr^{2i+1}$. Sebaliknya $sr^{2i} \circ (sr^{2i+1})^{-1} = r \in H_2 \circ S \circ H_2$ maka terdapat sisi berarah dari titik $H_2 \circ sr^{2i+1}$ ke $H_2 \circ sr^{2i}$. Terbukti bahwa jika $S = \{s\}$ atau $S = \{r\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$ adalah digraf yang memuat 2 siklus berorder 2.
- ii) Ambil $S = \{1\}$ sehingga $H_2 \circ S \circ H_2 = H_2$. Karena tidak terdapat sisi berarah pada titik-titik $H_2 \circ r^{2i}, H_2 \circ r^{2i+1}, H_2 \circ sr^{2i}$, dan $H_2 \circ sr^{2i+1}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$ adalah digraf nol berorder 4.

Akibat 2

Jika $H_2 = \{1, r^2, r^4, \dots, r^{n-2}\}$ dan $S = \{s\}$ atau $S = \{r\}$ maka semua titik pada graf $\Gamma(D_{2n}, H_2, H_2 \circ S \circ H_2)$ adalah berderajat dua.

Bukti:

Berdasarkan bukti pada teorema 2 saat $S = \{s\}$ diperoleh $od(H_2 \circ r^{2i}) = 1$ dan $id(H_2 \circ sr^{2i}) = 1$. Sebaliknya $od(H_2 \circ sr^{2i}) = 1$ dan $id(H_2 \circ r^{2i}) = 1$.

Selanjutnya $od(H_2 \circ r^{2i+1}) = 1$ dan $id(H_2 \circ sr^{2i+1}) = 1$. Sebaliknya $od(H_2 \circ sr^{2i+1}) = 1$ dan $id(H_2 \circ r^{2i+1}) = 1$.

$$\text{Jadi } \deg(H_2 \circ r^{2i}) = od(H_2 \circ r^{2i}) + id(H_2 \circ r^{2i}) = 1 + 1 = 2;$$

$$\deg(H_2 \circ sr^{2i}) = od(H_2 \circ sr^{2i}) + id(H_2 \circ sr^{2i}) = 1 + 1 = 2;$$

$$\deg(H_2 \circ r^{2i+1}) = od(H_2 \circ r^{2i+1}) + id(H_2 \circ r^{2i+1}) = 1 + 1 = 2;$$

$$\deg(H_2 \circ sr^{2i+1}) = od(H_2 \circ sr^{2i+1}) + id(H_2 \circ sr^{2i+1}) = 1 + 1 = 2.$$

Begitu pula saat $S = \{r\}$ diperoleh $\deg(H_2 \circ r^{2i}) = \deg(H_2 \circ sr^{2i}) = \deg(H_2 \circ r^{2i+1}) = \deg(H_2 \circ sr^{2i+1}) = 2$.

2.3. Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal $H_3 = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$

Teorema 3

Diberikan grup D_{2n} dengan n genap dan $n \geq 4$. $H_3 = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$ adalah subgrup normal dan S adalah suatu subhimpunan dari D_{2n} .

- i) Jika $S = \{s\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$ adalah digraf yang memuat $\frac{n}{2}$ siklus berorder 2.
- ii) Jika $S = \{r\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$ adalah digraf yang memuat 2 siklus berorder $\frac{n}{2}$.
- iii) Jika $S = \{1\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$ adalah digraf nol berorder n .

Bukti:

$$\text{Diketahui } D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\} \text{ dan } H_3 = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}.$$

Menurut teorema Lagrange, banyak koset dari H_3 di D_{2n} adalah $\frac{2n}{2} = n$ koset yaitu $H_3 = \{1, r^{\frac{n}{2}}\} = H_3 \circ r^{\frac{n}{2}}, \{r, r^{\frac{n}{2}+1}\} = H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+1}, \{r^2, r^{\frac{n}{2}+2}\} = H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+2}, \dots, \{r^{\frac{n}{2}-1}, r^{n-1}\} = H_3 \circ r^{\frac{n}{2}-1}, \{s, sr^{\frac{n}{2}}\} = H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}}, \{sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\} = H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+1}, \{sr^2, sr^{\frac{n}{2}+2}\} = H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+2}, \dots, \{r^{\frac{n}{2}-1}, r^{n-1}\} = H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}-1}.$

Sehingga $\{H_3 \circ r^{\frac{n}{2}}, H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+1}, H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+2}, \dots, H_3 \circ r^{\frac{n}{2}-1}, H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}}, H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+1}, H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+2}, \dots, H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}-1}\}$ atau $\{H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}, H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}\}$ untuk setiap $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ merupakan himpunan titik pada graf kosetnya.

- i) Ambil $S = \{s\}$ sehingga $H_3 \circ S \circ H_3 = \{s, sr^{\frac{n}{2}}\}$. $sr^{\frac{n}{2}+i} \circ (r^{\frac{n}{2}+i})^{-1} = s \in H_3 \circ S \circ H_3$ maka terdapat sisi berarah dari titik $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}$ ke $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$ untuk $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$. Sebaliknya $r^{\frac{n}{2}+i} \circ$

- $(sr^{\frac{n}{2}+i})^{-1} = s \in H_3 \circ S \circ H_3$ maka terdapat sisi berarah dari titik $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$ ke $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}$ untuk $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$. Terbukti bahwa jika $S = \{s\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$ adalah digraf yang memuat $\frac{n}{2}$ siklus berorder 2.
- ii) Ambil $S = \{r\}$ sehingga $H_3 \circ S \circ H_3 = \{r, r^{\frac{n}{2}+1}\}$. Untuk $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ sedemikian hingga $r^{\frac{n}{2}+i+1} \circ (r^{\frac{n}{2}+i})^{-1} = r \in H_3 \circ S \circ H_3$ maka terdapat sisi berarah dari titik $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}$ ke $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i+1}$. Dan $r^{\frac{n}{2}+i} \circ (r^{\frac{n}{2}+i-1})^{-1} = r \in H_3 \circ S \circ H_3$ maka terdapat sisi berarah dari titik $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i-1}$ ke $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}$. Selanjutnya $sr^{\frac{n}{2}+i-1} \circ (sr^{\frac{n}{2}+i})^{-1} = r \in H_3 \circ S \circ H_3$ maka terdapat sisi berarah dari titik $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$ ke $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i-1}$. Dan $sr^{\frac{n}{2}+i} \circ (sr^{\frac{n}{2}+i+1})^{-1} = r \in H_3 \circ S \circ H_3$ maka terdapat sisi berarah dari titik $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i+1}$ ke $H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$. Terbukti bahwa jika $S = \{r\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$ adalah digraf yang memuat 2 siklus berorder $\frac{n}{2}$.
- iii) Ambil $S = \{1\}$ sehingga $H_3 \circ S \circ H_3 = H_3$. Karena tidak terdapat sisi berarah pada titik-titik $H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}, H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}$ untuk setiap $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_1, H_1 \circ S \circ H_1)$ adalah digraf nol berorder n .

Akibat 3

Jika $H_3 = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$ dan $S = \{s\}$ atau $S = \{r\}$ maka semua titik pada graf $\Gamma(D_{2n}, H_3, H_3 \circ S \circ H_3)$ adalah berderajat dua.

Bukti:

Berdasarkan bukti pada teorema 3 saat $S = \{s\}$ diperoleh $od(H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}) = 1$ dan $id(H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}) = 1$.

1. Sebaliknya $od(H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}) = 1$ dan $id(H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}) = 1$.

Jadi $\deg(H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}) = od(H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}) + id(H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}) = 1 + 1 = 2$;

$\deg(H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}) = od(H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}) + id(H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}) = 1 + 1 = 2$.

Begitu pula saat $S = \{r\}$ diperoleh $\deg(H_3 \circ r^{\frac{n}{2}+i}) = \deg(H_3 \circ sr^{\frac{n}{2}+i}) = 2$.

2.4. Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal $H_5 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$

Teorema 4

Diberikan grup D_{2n} dengan n genap dan $n \geq 4$. $H_4 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$ adalah subgrup normal dan S adalah suatu subhimpunan dari D_{2n} .

i) Jika $S = \{r\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$ adalah digraf siklus berorder 2.

ii) Jika $S = \{s\}$ atau $S = \{1\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$ adalah digraf nol berorder 2.

Bukti:

Diketahui $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dan $H_4 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$. Menurut teorema Lagrange, banyak koset dari H_4 di D_{2n} adalah $\frac{2n}{n} = 2$ koset yaitu $H_4 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\} = H_4 \circ sr^{2i}$ dan $\{r, r^3, \dots, r^{n-1}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\} = H_4 \circ sr^{2j+1}$ sebarang i dan j . Sehingga $\{H_4 \circ sr^{2i}, H_4 \circ sr^{2j+1}\}$ untuk suatu $1 \leq i, j \leq \frac{n}{2} - 1$ merupakan himpunan titik pada graf kosetnya.

i) Ambil $S = \{r\}$ sehingga $H_4 \circ S \circ H_4 = \{r, r^3, \dots, r^{n-1}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$.

Karena $sr^{2j+1} \circ (sr^{2i})^{-1} = r^{n-2(j-i)-1} \in H_4 \circ S \circ H_4$ maka terdapat sisi berarah dari $H_4 \circ sr^{2i}$ ke $H_4 \circ sr^{2j+1}$. Sebaliknya $sr^{2i} \circ (sr^{2j+1})^{-1} = r^{n-2(i-j)+1} \in H_4 \circ S \circ H_4$ maka terdapat sisi berarah dari $H_4 \circ sr^{2j+1}$ ke $H_4 \circ sr^{2i}$. Terbukti bahwa jika $S = \{r\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$ adalah digraf siklus berorder 2.

ii) Ambil $S = \{s\}$ sehingga $H_4 \circ S \circ H_4 = H_4$. Karena $sr^{2j+1} \circ (sr^{2i})^{-1} = r^{n-2(j-i)-1} \notin H_4$ maka tidak terdapat sisi berarah dari $H_4 \circ sr^{2i}$ ke $H_4 \circ sr^{2j+1}$. Sebaliknya karena $sr^{2i} \circ (sr^{2j+1})^{-1} = r^{n-2(i-j)+1} \notin H_4$ maka tidak terdapat sisi berarah dari $H_4 \circ sr^{2j+1}$ ke $H_4 \circ sr^{2i}$. Begitu pula untuk $S = \{1\}$ sehingga $H_4 \circ S \circ H_4 = H_4$. Jadi, jika $S = \{s\}$ atau $S = \{1\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$ adalah digraf nol berorder 2.

Akibat 4

Jika $H_4 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$ dan $S = \{r\}$ maka semua titik pada graf $\Gamma(D_{2n}, H_4, H_4 \circ S \circ H_4)$ adalah berderajat dua.

Bukti:

Berdasarkan bukti pada teorema 4 saat $S = \{r\}$ diperoleh $od(H_4 \circ sr^{2i}) = 1$ dan $id(H_4 \circ sr^{2j+1}) = 1$. Sebaliknya $od(H_4 \circ sr^{2j+1}) = 1$ dan $id(H_4 \circ sr^{2i}) = 1$.

Jadi $\deg(H_4 \circ sr^{2i}) = od(H_4 \circ sr^{2i}) + id(H_4 \circ sr^{2i}) = 1 + 1 = 2$, begitu pula

$\deg(H_4 \circ sr^{2j+1}) = od(H_4 \circ sr^{2j+1}) + id(H_4 \circ sr^{2j+1}) = 1 + 1 = 2$.

2.5. Karakteristik Graf Koset dari Subgrup Normal $H_5 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$

Teorema 5

Diberikan grup D_{2n} dengan n genap dan $n \geq 4$. $H_5 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$ adalah subgrup normal dan S adalah suatu subhimpunan dari D_{2n} .

i) Jika $S = \{s\}$ atau $S = \{r\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$ adalah digraf sikel berorder 2.

ii) Jika $S = \{1\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$ adalah digraf nol berorder 2.

Bukti:

Diketahui $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dan $H_6 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$. Menurut teorema Lagrange, banyak koset dari H_6 di D_{2n} adalah $\frac{2n}{n} = 2$ koset yaitu $H_6 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\} = H_6 \circ sr^{2i+1}$ dan $\{r, r^3, \dots, r^{n-1}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\} = H_6 \circ sr^{2j}$ sebarang i dan j . Sehingga $\{H_6 \circ sr^{2i+1}, H_6 \circ sr^{2j}\}$ untuk suatu $1 \leq i, j \leq \frac{n}{2} - 1$ merupakan himpunan titik pada graf kosetnya.

i) Ambil $S = \{s\}$ sehingga $H_6 \circ S \circ H_6 = \{r, r^3, \dots, r^{n-1}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$.

Karena $sr^{2j} \circ (sr^{2i+1})^{-1} = r^{n-2(j-i)+1} \in H_5 \circ S \circ H_5$ maka terdapat sisi berarah dari $H_5 \circ sr^{2i+1}$ ke $H_5 \circ sr^{2j}$. Sebaliknya $sr^{2i+1} \circ (sr^{2j})^{-1} = r^{n-2(i-j)-1} \in H_5 \circ S \circ H_5$ maka terdapat sisi berarah dari $H_5 \circ sr^{2j}$ ke $H_5 \circ sr^{2i+1}$. Begitu pula $S = \{r\}$ sehingga $H_5 \circ S \circ H_5 = \{r, r^3, \dots, r^{n-1}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$. Terbukti bahwa jika $S = \{s\}$ atau $S = \{r\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$ adalah digraf sikel berorder 2.

ii) Ambil $S = \{1\}$ sehingga $H_5 \circ S \circ H_5 = H_5$. Karena $sr^{2j} \circ (sr^{2i+1})^{-1} = r^{n-2(j-i)+1} \notin H_5$ maka tidak terdapat sisi berarah dari $H_5 \circ sr^{2i+1}$ ke $H_5 \circ sr^{2j}$. Sebaliknya karena $sr^{2i+1} \circ (sr^{2j})^{-1} = r^{n-2(i-j)-1} \notin H_5$ maka tidak terdapat sisi berarah dari $H_5 \circ sr^{2j}$ ke $H_5 \circ sr^{2i+1}$. Jadi, jika $S = \{1\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$ adalah digraf nol berorder 2.

Akibat 5

Graf $\Gamma(D_{2n}, H_5, H_5 \circ S \circ H_5)$ dengan $H_5 = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$ dan $S = \{s\}$ atau $S = \{r\}$ hanya memiliki dua titik yang masing-masing berderajat dua.

Bukti:

Berdasarkan bukti pada teorema 5 saat $S = \{s\}$ diperoleh $od(H_5 \circ sr^{2i+1}) = 1$ dan $id(H_5 \circ sr^{2j}) = 1$. Sebaliknya $od(H_5 \circ sr^{2j}) = 1$ dan $id(H_5 \circ sr^{2i+1}) = 1$.

Jadi $\deg(H_5 \circ sr^{2i+1}) = od(H_5 \circ sr^{2i+1}) + id(H_5 \circ sr^{2i+1}) = 1 + 1 = 2$, begitu pula

$\deg(H_5 \circ sr^{2j}) = od(H_5 \circ sr^{2j}) + id(H_5 \circ sr^{2j}) = 1 + 1 = 2$.

Begitu pula saat $S = \{r\}$ diperoleh $\deg(H_5 \circ sr^{2i+1}) = \deg(H_5 \circ sr^{2j}) = 2$.

3. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa graf koset dari D_{2n} terhadap subgrup normal H dan subhimpunan S jika $H \circ S \circ H \neq H$ dan banyak kosetnya adalah 2, maka graf $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$ adalah digraf sikel berorder 2. Jika $H \circ S \circ H = H$ dengan $H = \{1, r^d, r^{2d}, \dots, r^{n-d}\}$ untuk $S = \{s\}$ maka graf $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$ adalah digraf yang memuat d sikel berorder 2 sedangkan untuk $S = \{r\}$ maka $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$ adalah digraf yang memuat 2 sikel berorder d . Dan jika $H \circ S \circ H = H$ maka membentuk digraf nol. Kemudian semua titik pada graf $\Gamma(D_{2n}, H, H \circ S \circ H)$ dengan $H \circ S \circ H \neq H$ adalah berderajat dua.

Penelitian selanjutnya diharapkan membahas graf koset dari subgrup normal dan semua subhimpunan pada grup dihedral dan teorema-teorema lain tentang graf koset.

REFERENSI

- [1] Schneider, Csaba. 2001. *Groups and Graphs*. USA: Publ. Math.
- [2] Tarnauceanu M. 2015. Classifying Fuzzy Normal Subgroups of Finite Groups. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 12(2): 107-115.
- [3] Muftiridha dan Muhammad, A. (2016). *Faktorisasi graf koset schreier dari subgrup sejati di grup dihedral*. Undergraduate thesis, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.