Prosiding Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami
Vol.3, No.1, September 2019, hlm. 43-54
p-ISSN: 2580-4596; e-ISSN: 2580-460X

The Description of Fuzzy Sets Operations in Lattice Theory

Aminahtuz Zahro, Lailatul Maziyah Wildan Mufaridho, Evawati Alisah
Jurusan Matematika, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
hanafizhalkaff@gmail.com, wildan.mufaridho@gmail.com, evawatialisah@mat.uin-malang.ac.id

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 21 Oktober 2019
Direvisi: 18 November 2019
Diterbitkan: 15 Januari 2020

Kata Kunci:

Fuzzy
Fungsi Keanggotaan
Gabungan
Irisan
Latis

ABSTRAK

Pada aljabar abstrak, suatu himpunan dengan satu operasi biner merupakan semi Latis jika operasi tersebut idempoten, komutatif, dan asosiatif. Kemudian suatu aljabar dikatakan latis, jika aljabar terdiri dari dua operasi biner dan masing-masing aljabar untuk masing-masing operasinya merupakan semi Latis. Himpunan fuzzy sendiri merupakan perkembangan dari himpunan tegas yang memiliki fungsi keanggotaan pada interval [0,1]. Pada umumnya latis menggunakan himpunan tegas sebagai objeknya, maka di sini kami ingin menggunakan himpunan kabur (fuzzy) untuk mengetahui bagaimana deskripsi operasi irisan dan gabungan pada himpunan fuzzy dalam teori latis. Kami mengaplikasikan dua operasi himpunan fuzzy yaitu irisan dan gabungan, dimana himpunan fuzzy menggunakan α-*cut* yang berbentuk interval tertutup serta menggunakan fungsi keanggotaan segitiga. Dari penelitian ini, terbukti bahwa himpunan fuzzy secara fungsi keanggotaan segitiga dengan dua operasi irisan dan gabungan merupakan latis yang memenuhi sifat-sifat dalam teori latis, yaitu komutatif, asosiatif, idempoten, dan absorpsi. Sebagai saran, untuk penelitian selanjutnya dapat menggunakan aplikasi operasi yang lain yang berlaku pada fuzzy logic dan bilangan fuzzy dalam teori latis dan lainnya yang setara.

Korespondensi:

Aminahtuz Zahro,
Jurusan Matematika,
UIN Maulana Malik Ibrahim Malang,
Jl. Gajayana No. 50 Malang, Jawa Timur, Indonesia 65144
hanafizhalkaff@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Salah satu disiplin ilmu dalam matematika yang terus mengalami perkembangan adalah aljabar. Pada pertengahan pertama abad ke-19, George Boole berupaya untuk merumuskan proposisi logika yang kemudian mendasari konsep aljabar Boolean. Selama berlangsung penelitian aksioma-aksioma aljabar Boolean di akhir abad ke-19, Charles S. Pierce dan Ernst Schröder memperkenalkan teori latis. Teori ini muncul dari dua teori utama yaitu keterurutan dan aljabar abstrak yang dikembangkan oleh Garret Birkhoff. Sebuah keterurutan yang memenuhi sifat refleksif, antisimetri, transitif, dan linier, dikatakan latis jika supremum dan infimumnya ada. Sedangkan suatu aljabar dengan dua operasi biner dikatakan latis jika masing-masing aljabar dengan satu operasi binernya memenuhi sifat idempoten, komutatif, asosiatif, dan absorpsi [1].

Dalam aljabar abstrak, subjek pertama yang digunakan sebagai penelitian yaitu menggunakan gagasan himpunan fuzzy yakni merupakan kelas dari objek-objek kontinu dari derajat keanggotaan, layaknya suatu himpunan yang dicirikan oleh fungsi keanggotaannya yang memberikan derajat keanggotaan setiap objek antara nol hingga satu [2]. Ada beberapa penyajian fungsi keanggotaan untuk menyatakan himpunan fuzzy, seperti: representasi linier, kurva segitiga, kurva trapesium, dan lain sebagainya [3]. Selain itu, cara lain untuk menyatakan himpunan fuzzy yaitu menggunakan potongan α. Untuk suatu bilangan $\alpha \in [0,1]$, potongan α dari suatu himpunan fuzzy $\bar{A}$, yang dilambangkan dengan A_α, ialah suatu himpunan tegas yang memuat semua unsur dari semesta dengan derajat keanggotaan dalam $\bar{A}$ yang lebih besar atau sama dengan α [2].

Pada penelitian sebelumnya, ditemukan keterkaitan antara teori himpunan fuzzy dengan teori latis. dimulai pada tahun 1971, A. Rosenfeld memperluas gagasan teori grup untuk memperkenalkan suatu disiplin baru yaitu grup fuzzy. Percobaan serupa menghasilkan teori latis dibawa oleh B. Yung dan W. Wu pada tahun 1990. Setelah itu N. Ajmal dan K.V. Thomas secara sistematis mengembangkan teori dari fuzzy sublatis [4]. Pada tahun 2012, Latha S.Nair melakukan penelitian mengenai aplikasi himpunan fuzzy dalam teori latis. Kemudian terakhir pada tahun 2015, Takashi Mitsuishi dan Grzegorz Bancerek meneliti mengenai latis pada himpunan fuzzy.

Penelitian mengenai himpunan fuzzy dan teori latis terus menarik untuk dibahas, karena mereka memiliki keunikan tersendiri yang menarik para peneliti untuk terus mempelajari tentang keterkaitan kedua hal tersebut. Berdasarkan paparan penelitian terdahulu, dari Latha S. Nair yang melakukan penelitian mengenai aplikasi dari himpunan fuzzy dalam teori latis, maka kami tertarik untuk mengetahui deskripsi operasi himpunan fuzzy dalam teori latis.

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang kami gunakan pada penelitian ini yaitu studi literatur yang merupakan serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat, serta mengelola bahan penelitian [5]. Kami memilih metode ini, karena kami ingin mengaplikasikan definisi latis pada operasi-operasi yang ada di himpunan fuzzy, yakni mengembangkan definisi latis yang mula-mula berdasarkan himpunan tegas menjadi latis yang berdasarkan himpunan fuzzy.

Kami menggunakan dua literatur utama yaitu: *Lattice Theory, Foundation By. George Grätzer, dan Fuzzy Sets dan Fuzz Logic: Theory and Applications By. George J.Klir dan Bo yuan.* Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan untuk mendeskripsikan operasi-operasi himpunan fuzzy dalam teori/definisi latis, yakni sebagai berikut:

1. Mencari dan mengumpulkan berbagai literatur yang berkaitan dengan penelitian, baik dari buku-buku, jurnal, internet, artikel dan sumber lain yang relevan.
2. Memahami dan mempelajari konsep teori latis, teori fuzzy dan teori pendukung lainnya.
3. Mendefinisikan fungsi karakteristik dari suatu himpunan fuzzy.
4. Mendeskripsikan definisi dan sifat operasi himpunan fuzzy.
5. Menerapkan teori latis sebagai aljabar pada operasi himpunan fuzzy.
6. Membuat kesimpulan dari pembahasan

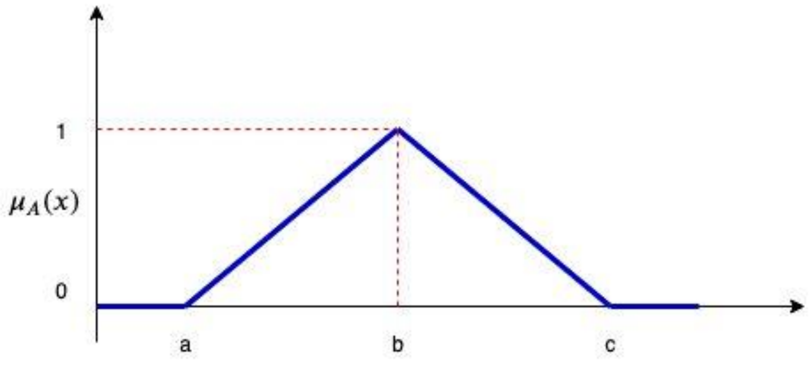
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan literatur yang telah kami pelajari dan pahami, kami menemukan hasil untuk deskripsi operasi himpunan fuzzy dalam teori latis dengan menggunakan potongan α dari fungsi karakteristik segitiga sebagai berikut.

3.1. Deskripsi Operasi Himpunan Fuzzy dalam Teori Latis

Misalkan diberikan himpunan fuzzy $A, B,$ dan C. Dengan menggunakan fungsi keanggotaan segitiga, maka:

1. Himpunan Fuzzy A:



Gambar 1. Fungsi Keanggotaan Himpunan A

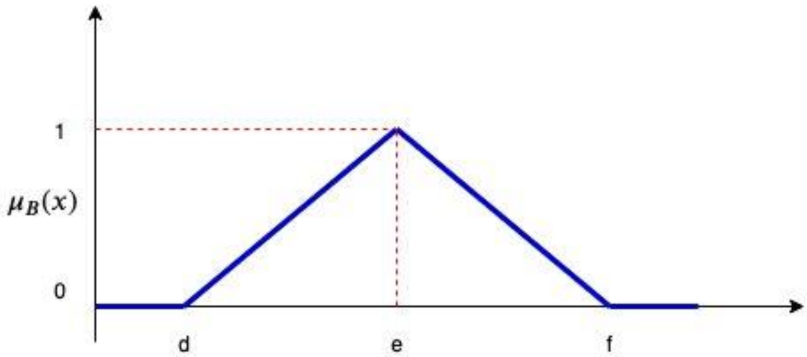
Dengan fungsi keanggotaannya:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b \le x \le c \\ 0, & x \le a \text{ atau } x \ge c \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x-a}{b-a}$ maka diperoleh $x = (b-a)\alpha + a$ dan $\alpha = \frac{c-x}{c-b}$ diperoleh $x = c - (c-b)\alpha$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari A untuk $\alpha \in [0,1]$, yaitu

$$A_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha].$$

2. Himpunan Fuzzy B:



Gambar 2. Fungsi Keanggotaan Himpunan B

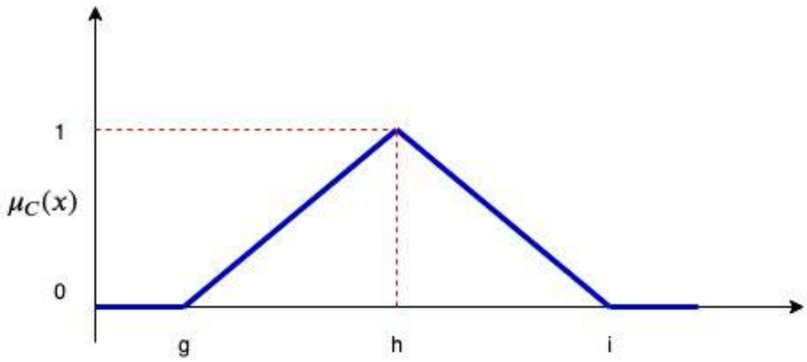
Dengan fungsi keanggotaannya:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \dfrac{x-d}{e-d}, & d \le x \le e \\ \dfrac{f-x}{f-e}, & e \le x \le f \\ 0, & x \le d \text{ atau } x \ge f \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x-d}{e-d}$ maka diperoleh $x = (e-d)\alpha + d$ dan $\alpha = \frac{f-x}{f-e}$ diperoleh $x = f - (f-e)\alpha$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari B untuk $\alpha \in [0,1]$, yaitu

$$B_\alpha = [(e-d)\alpha + d, f - (f-e)\alpha].$$

3. Himpunan Fuzzy C:



Gambar 3. Fungsi Keanggotaan Himpunan C

Dengan fungsi keanggotaannya:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-g}{h-g}, & g\le x<h\\ \dfrac{i-x}{i-h}, & h\le x\le i\\ 0, & x\le g \text{ atau } x\ge i\end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha=\frac{x-g}{h-g}$ maka diperoleh $x=(h-g)\alpha+g$ dan $\alpha=\frac{i-x}{i-h}$ diperoleh $x=i-(i-h)\alpha$, dapat dinyatakan dalam $\alpha-cut$ dari C untuk $\alpha\in[0,1]$, yaitu

$$C_\alpha=[(h-g)\alpha+g,i-(i-h)\alpha].$$

Untuk sebarang dua himpunan fuzzy A_α dan B_α. Didefinisikan operasi irisan dan gabungan dari himpunan fuzzy sebagai berikut

$$(A_\alpha\cap B_\alpha)(x)=\min[A_\alpha(x),B_\alpha(x)] \quad (3.1)$$

$$(A_\alpha\cup B_\alpha)(x)=\max[A_\alpha(x),B_\alpha(x)] \quad (3.2)$$

Misalkan $\mathcal{R}$ menotasikan himpunan semua himpunan fuzzy. Maka operasi irisan dan gabungan merupakan suatu fungsi dengan bentuk $\mathcal{R}\times\mathcal{R}\to\mathcal{R}$. Teorema berikut yang menetapkan sifat-sifat dasar dari operasi irisan dan gabungan, serta memastikan bahwa $(\mathcal{R},\cap,\cup)$ merupakan latis, yang mana $\cap$ dan $\cup$ masing-masing merepresentasikan *join* dan *meet*.

Teorema 3.1. *Misalkan $\cap$ dan $\cup$ merupakan operasi biner pada $\mathcal{R}$ yang masing-masing telah didefinisikan oleh* (4.1) *dan* (4.2). *Maka untuk suatu A_α, B_α, dan $C_\alpha\in\mathcal{R}$,* $(\mathcal{R},\cap,\cup)$ *adalah latis yang memenuhi sifat-sifat berikut:*

(a.) $A_\alpha\cap B_\alpha=B_\alpha\cap A_\alpha$,

$A_\alpha\cup B_\alpha=B_\alpha\cup A_\alpha$ *(komutatif).*

(b.) $(A_\alpha\cap B_\alpha)\cap C_\alpha=A_\alpha\cap(B_\alpha\cap C_\alpha)$,

$(A_\alpha\cup B_\alpha)\cup C_\alpha=A_\alpha\cup(B_\alpha\cup C_\alpha)$ *(Asosiatif).*

(c.) $A_\alpha\cap A_\alpha=A_\alpha$,

$A_\alpha\cup A_\alpha=A_\alpha$ *(Idempoten).*

(d.) $A_\alpha\cap(A_\alpha\cup B_\alpha)=A_\alpha$,

$A_\alpha\cup(A_\alpha\cap B_\alpha)=A_\alpha$ *(Absorpsi).*

Sifat Komutatif Irisan.

Untuk setiap himpunan fuzzy A_α dan B_α dengan fungsi keanggotaan segitiga, maka berlaku $A_\alpha\cap B_\alpha=B_\alpha\cap A_\alpha$.

Bukti.

Ambil sebarang $A_\alpha,B_\alpha\in\mathcal{R}$ dengan $A_\alpha=[(b-a)\alpha+a,c-(c-b)\alpha]$ dan $B_\alpha=[(e-d)\alpha+d,f-(f-e)\alpha]$ dimana $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$.

Misalkan

$(b-a)\alpha+a=x$

$c-(c-b)\alpha=y$

$(e-d)\alpha+d=z$

$f-(f-e)\alpha=w$

Dimana $x,y,z,w\in\mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned}A_\alpha\cap B_\alpha&=\min[A_\alpha,B_\alpha]\\&=\min\big[[x,y],[z,w]\big]\\&=\min\big[[z,w],[x,y]\big]\\&=B_\alpha\cap A_\alpha\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa operasi irisan bersifat komutatif.

Contoh 3.1:

Misalkan bilangan fuzzy $\tilde{2}$ dan $\tilde{3}$ mempunyai fungsi keanggotaan segitiga sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{2}}(x)=\text{segitiga }(x;0,2,4)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le 2\\ \dfrac{4-x}{2}, & 2\le x\le 4\\ 0 & x\le 0 \text{ atau } x\ge 4,\end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x}{2}$ diperoleh $x = 2\alpha$ dan $\alpha = \frac{4-x}{2}$ diperoleh $x = 4 - 2\alpha$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\breve{2}$ untuk $\alpha \in [0,1]$ yaitu,

$$2_\alpha = [2a, 4 - 2a]$$

Sedangkan

$$\mu_{\tilde{3}}(x) = \text{segitiga } (x; 2,3,4) = \begin{cases} x - 2 \ , 2 \leq x \leq 3 \\ 4 - x \ , 3 \leq x \leq 4 \\ 0 \ , x < 2 \text{ atau } x \geq 4 \end{cases}$$

Dengan menyatakan $a = x - 2$ diperoleh $x = a + 2$ dan $a = 4 - x$ diperoleh $x = 4 - a$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\tilde{3}$ untuk $a \in [0,1]$ yaitu

$$3_\alpha = [a + 2, 4 - a].$$

Maka:

$$\begin{aligned} 2_\alpha \cap 3_\alpha &= [2\alpha\, , 4 - 2\alpha] \cap [\alpha + 2\, , 4 - \alpha] \\ &= \big[\min\big[[2\alpha\, , 4 - 2\alpha], [\alpha + 2\, , 4 - \alpha]\big]\big] \\ &= [\min[2\alpha, \alpha + 2], \min[4 - 2\alpha, 4 - \alpha]] \end{aligned}$$

Dapat diketahui $\min[2\alpha, \alpha + 2]$ yaitu 2α untuk $\alpha \in [0,1]$ dan $\min[4 - 2\alpha, 4 - \alpha]$ yaitu $4 - 2\alpha$ untuk $\alpha \in [0,1]$.

Sehingga

$$2_\alpha \cap 3_\alpha = \{2\alpha, 4 - 2\alpha\}$$

Kemudian

$$\begin{aligned} 3_\alpha \cap 2_\alpha &= [a + 2\, , 4 - a] \cap [2a, 4 - 2a] \\ &= \min\big[[a + 2\, , 4 - a], [2a, 4 - 2a]\big] \\ &= \min[\alpha + 2\, , 2\alpha]\, , \min[4 - \alpha, 4 - 2\alpha] \end{aligned}$$

Telah diketahui $\min[\alpha + 2, 2\alpha]$ yaitu 2α untuk $\alpha \in [0,1]$ dan $\min[4 - \alpha, 4 - 2\alpha]$ yaitu $4 - 2\alpha$ untuk $\alpha \in [0,1]$.

Dengan demikian diperoleh

$$3_\alpha \cap 2_\alpha = \{\alpha + 2, 4 - \alpha\}$$

Maka terbukti $2_\alpha \cap 3_\alpha = 3_\alpha \cap 2_\alpha$.

Sifat Komutatif Gabungan.

Untuk setiap himpunan fuzzy A_α dan B_α dengan fungsi keanggotaan segitiga, maka berlaku $A_\alpha \cup B_\alpha = B_\alpha \cup A_\alpha$.

Bukti.

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha \in \mathcal{R}$ dengan $A_\alpha = [(b - a)\alpha + a\, , c - (c - b)\alpha]$ dan $B_\alpha = [(e - d)\alpha + d\, , f - (f - e)\alpha]$.

Misalkan

$(b - a)\alpha + a = p$

$c - (c - b)\alpha = q$

$(e - d)\alpha + d = r$

$f - (f - e)\alpha = s$

dimana $p, q, r, s \in R$, maka

$$\begin{aligned} A_\alpha \cup B_\alpha &= \max[A_\alpha, B_\alpha] \\ &= \max\big[[p, q], [r, s]\big] \\ &= \max\big[[r, s], [\, p, q]\big] \\ &= \max[B_\alpha, A_\alpha] \\ &= B_\alpha \cup A_\alpha \end{aligned}$$

Dengan demikian terbukti operasi gabungan bersifat komutatif.

Contoh 3.2:

Misalkan bilangan fuzzy $\tilde{2}$ dan $\tilde{3}$ mempunyai fungsi keanggotaan segitiga sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{2}}(x) = \text{segitiga } (x; 0,2,4) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} \ , 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{4 - x}{2} \ , 2 \leq x \leq 4 \\ 0 \ \ x \leq 0 \text{ atau } x \geq 4, \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x}{2}$ diperoleh $x = 2\alpha$ dan $\alpha = \frac{4-x}{2}$ diperoleh $x = 4 - 2\alpha$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\breve{2}$ untuk $\alpha \in [0,1]$ yaitu,

$$2_\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha]$$

Sedangkan

$$\mu_{\tilde{3}}(x) = \text{segitiga }(x; 2,3,4) = \begin{cases} x-2 \ , 2 \leq x \leq 3 \\ 4-x \ , 3 \leq x \leq 4 \\ 0 \ , x < 2 \text{ atau } x \geq 4 \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = x - 2$ diperoleh $x = \alpha + 2$ dan $\alpha = 4 - x$ diperoleh $x = 4 - \alpha$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\tilde{3}$ untuk $\alpha \in [0,1]$ yaitu

$$3_\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha].$$

Maka dapat diperoleh

$$\begin{aligned} 2_\alpha \cup 3_\alpha &= [2\alpha, 4 - 2\alpha] \cup [\alpha + 2, 4 - \alpha] \\ &= \left[\max\left[[2\alpha, 4 - 2\alpha], [\alpha + 2, 4 - \alpha]\right]\right] \\ &= [\max[2\alpha, \alpha + 2], \max[4 - 2\alpha, 4 - \alpha]] \end{aligned}$$

Diketahui $\max[2\alpha, \alpha + 2]$ yaitu $\alpha + 2$ untuk $\alpha \in [0,1]$ dan $\max[4 - 2\alpha, 4 - \alpha]$ yaitu $4 - \alpha$ untuk $\alpha \in [0,1]$.

Sehingga

$$2_\alpha \cup 3_\alpha = \{\alpha + 2, 4 - \alpha\}.$$

Kemudian

$$\begin{aligned} 3_\alpha \cup 2_\alpha &= [\alpha + 2, 4 - a] \cup [2\alpha, 4 - 2\alpha] \\ &= \max\left[[\alpha + 2, 4 - \alpha], [2\alpha, 4 - 2\alpha]\right] \\ &= \max[\alpha + 2, 2\alpha], \max[4 - \alpha, 4 - 2\alpha] \end{aligned}$$

Diketahui $\max[\alpha + 2, 2\alpha]$ yaitu $\alpha + 2$ jika $\alpha \in [0,1]$ dan $\max[4 - \alpha, 4 - 2\alpha]$ yaitu $4 - \alpha$ jika $\alpha \in [0,1]$.

Sehingga

$$3_\alpha \cup 2_\alpha = \{\alpha + 2, 4 - \alpha\}$$

Dengan demikian terbukti $2_\alpha \cup 3_\alpha = 3_\alpha \cup 2_\alpha$.

Sifat Asosiatif Irisan.

Untuk setiap himpunan fuzzy A_α dan B_α dengan fungsi keanggotaan segitiga, maka berlaku

$$(A_\alpha \cap B_\alpha) \cap C_\alpha = A_\alpha \cap (B_\alpha \cap C_\alpha).$$

Bukti.

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha \in \mathcal{R}$ dengan $A_\alpha = [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha]$, $B_\alpha = [(e - d)\alpha + d, f - (f - e)\alpha]$ dan $C_\alpha = [(h - g)\alpha + g, i - (i - h)\alpha]$ dimana $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$.

Misalkan

$(b - a)\alpha + a = k$

$c - (c - b)\alpha = l$

$(e - d)\alpha + d = m$

$f - (f - e)\alpha = n$

$(h - g)\alpha + g = o$

$i - (i - h)\alpha = p$

Dimana $k, l, m, n, o, p \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned} (A_\alpha \cap B_\alpha) \cap C_\alpha &= \min[\min[A_\alpha, B_\alpha], C_\alpha] \\ &= \min\left[\min\left[[k, l], [m, n]\right], [o, p]\right] \\ &= \min\left[\left[\min[k, m], \min[l, n]\right], [o, p]\right] \\ &= \min\left[[k, l], \left[\min[m, o], \min[n, p]\right]\right] \\ &= \min\left[[k, l], \min\left[[m, o], [n, p]\right]\right] \\ &= \min\left[A_\alpha, \min[B_\alpha, C_\alpha]\right] \\ &= A_\alpha \cap (B_\alpha \cap C_\alpha) \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa operasi irisan bersifat asosiatif.

Contoh 3.3:

Misalkan bilangan fuzzy $\tilde{1}, \tilde{2}$ dan $\tilde{3}$ mempunyai fungsi keanggotaan segitiga sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{1},}(x) = \text{segitiga }(x; 0,1,2) = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, 1 \leq x \leq 2 \\ 0, x \leq 0 \text{ atau } x \geq 2 \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = x$ diperoleh $x = \alpha$ dan $\alpha = 2 - x$ diperoleh $x = 2 - \alpha$, sehingga dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\check{2}$ untuk $\alpha \in [0,1]$ yaitu,

$$1_\alpha = [\alpha, 2-\alpha].$$

$$\mu_{\tilde{2}}(x) = \text{segitiga } (x; 0,2,4) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , 0 \le x \le 2 \\ \frac{4-x}{2} & , 2 \le x \le 4 \\ 0 & x \le 0 \text{ atau } x \ge 4, \end{cases}$$

Dengan menyatakan $a = \frac{x}{2}$ diperoleh $x = 2a$ dan $a = \frac{4-x}{2}$ diperoleh $x = 4 - 2a$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\breve{2}$ untuk $\alpha \in [0,1]$ yaitu,

$$2_\alpha = [2a, 4-2a]$$

Sedangkan

$$\mu_{\tilde{3}}(x) = \text{segitiga } (x; 2,3,4) = \begin{cases} x-2 & , 2 \le x \le 3 \\ 4-x & , 3 \le x \le 4 \\ 0 & , x < 2 \text{ atau } x \ge 4 \end{cases}$$

Dengan menyatakan $a = x - 2$ diperoleh $x = a + 2$ dan $a = 4 - x$ diperoleh $x = 4 - a$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\tilde{3}$ untuk $a \in [0,1]$ yaitu

$$3_\alpha = [a+2, 4-a].$$

$$\begin{aligned}(1_\alpha \cap 2_\alpha) \cap 3_\alpha &= \big[[\alpha\,, 2-\alpha] \cap [2a, 4-2a]\big] \cap [a+2, 4-a] \\ &= \min\big[\min\big[[\alpha\,, 2-\alpha], [2a, 4-2a]\big], [a+2, 4-a]\big] \\ &= \min\big[[\min[\alpha, 2\alpha], \min[2-\alpha, 4-2\alpha]], [\alpha+2\,, 4-\alpha]\big] \\ &= [\min[\min[\alpha, 2\alpha]\,, \alpha+2]\,, \min[\min[2-\alpha, 4-2\alpha]\,, 4-\alpha]] \\ &= [\min[\alpha, 2\alpha, \alpha+2]\,, \min[2-\alpha\,, 4-2\alpha\,, 4-\alpha]]\end{aligned}$$

Dapat diketahui max[α,$2\alpha, \alpha + 2$] yaitu α untuk $\alpha \in [0,1]$ dan max[2-α, $4 - 2\alpha, 4 - \alpha$] yaitu $2 - \alpha$ untuk $\alpha \in [0,1]$.

Sehingga

$$(1_\alpha \cap 2_\alpha) \cap 3_\alpha = \{\alpha, 2-\alpha\}$$

Kemudian,

$$\begin{aligned}1_\alpha \cap (2_\alpha \cap 3_\alpha) &= [\alpha\,, 2-\alpha] \cap \big[[2a, 4-2a] \cap [a+2, 4-a]\big] \\ &= \min\Big[[\alpha\,, 2-\alpha]\,, \min\big[[2\alpha, 4-2\alpha], [a+2, 4-a]\big]\Big] \\ &= \min\big[[\alpha\,, 2-\alpha], [\min[2\alpha\,, \alpha+2], \min[4-2\alpha\,, 4-\alpha]]\big] \\ &= [\min[\alpha, \min[2\alpha\,, \alpha+2]], \min[2-\alpha\,, \min[4-2\alpha\,, 4-\alpha]]] \\ &= [\min[\alpha, 2\alpha, \alpha+2]\,, \min[2-\alpha\,, 4-2\alpha\,, 4-\alpha]]\end{aligned}$$

Dapat diketahui max[α,$2\alpha, \alpha + 2$] yaitu α jika $\alpha \in [0,1]$ dan max[2-α, $4 - 2\alpha, 4 - \alpha$] yaitu $2 - \alpha$ jika $\alpha \in [0,1]$.

Sehingga

$$1_\alpha \cap (2_\alpha \cap 3_\alpha) = \{\alpha, 2-\alpha\}.$$

Dengan demikian terbukti bahwa $(1_\alpha \cap 2_\alpha) \cap 3_\alpha = 1_\alpha \cap (2_\alpha \cap 3_\alpha)$.

Sifat Asosiatif Gabungan.

Untuk setiap himpunan fuzzy A_α dan B_α dengan fungsi keanggotaan segitiga, maka berlaku

$$(A_\alpha \cup B_\alpha) \cup C_\alpha = A_\alpha \cup (B_\alpha \cup C_\alpha).$$

Bukti.

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha \in \mathcal{R}$ dengan $A_\alpha = [(b-a)\alpha + a\,, c - (c-b)\alpha]$, $B_\alpha = [(e-d)\alpha + d\,, f - (f-e)\alpha]$, $C_\alpha = [(h-g)\alpha + h\,,\ i - (i-h)\alpha]$.

Misalkan

$(b-a)\alpha + a = p$

$c - (c-b)\alpha = q$

$(e-d)\alpha + d = r$

$f - (f-e)\alpha = s$

$(h-g)\alpha + h = t$

$i - (i-h)\alpha = u$

dimana $p, q, r, s, t, u \in \mathcal{R}$, maka

$$\begin{aligned}(A_\alpha \cup B_\alpha) \cup C_\alpha &= \max\,[\max[A_\alpha\,, B_\alpha], C_\alpha] \\ &= \max\ [\max[(p,q), (r,s)], (t,u)] \\ &= \max\ \big[[\max[p,r], \max[q,s]], (t,u)\big] \\ &= \max[[\max[p,r], t]\,, [\max[q,s], u]] \\ &= \max[[p,q], \big[\max\big[[r,s], [t,u]\big]\big]\end{aligned}$$

$$= \max[A_\alpha, \max[B_\alpha, C_\alpha]]$$
$$= A_\alpha \cup (B_\alpha \cup C_\alpha)$$

Dengan demikian terbukti bahwa operasi gabungan bersifat asosiatif.

Contoh 3.4:

Misalkan bilangan fuzzy $\tilde{1}, \tilde{2}$ dan $\tilde{3}$ mempunyai fungsi keanggotaan segitiga sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{1},}(x) = \text{segitiga } (x; 0,1,2) = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, 1 \le x \le 2 \\ 0, x \le 0 \text{ atau } x \ge 2 \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = x$ diperoleh $x = \alpha$ dan $\alpha = 2 - x$ diperoleh $x = 2 - \alpha$. Sehingga dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\check{2}$ untuk $\alpha \in [0,1]$ yaitu,

$$1_\alpha = [\alpha, 2 - \alpha]$$

Selanjutnya,

$$\mu_{\tilde{2}}(x) = \text{segitiga } (x; 0,2,4) = \begin{cases} \frac{x}{2}, 0 \le x \le 2 \\ \frac{4 - x}{2}, 2 \le x \le 4 \\ 0 \ x \le 0 \text{ atau } x \ge 4, \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x}{2}$ diperoleh $x = 2\alpha$ dan $\alpha = \frac{4-x}{2}$ diperoleh $x = 4 - 2\alpha$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\check{2}$ untuk $\alpha \in [0,1]$ yaitu,

$$2_\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha]$$

Sedangkan

$$\mu_{\tilde{3}}(x) = \text{segitiga } (x; 2,3,4) = \begin{cases} x - 2, 2 \le x \le 3 \\ 4 - x, 3 \le x \le 4 \\ 0, x < 2 \text{ atau } x \ge 4 \end{cases}$$

Dengan menyatakan $a = x - 2$ diperoleh $x = a + 2$ dan $a = 4 - x$ diperoleh $x = 4 - a$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\tilde{3}$ untuk $a \in [0,1]$ yaitu

$$3_\alpha = [a + 2, 4 - a].$$

$$\begin{aligned}(1_\alpha \cup 2_\alpha) \cup 3_\alpha &= \big[[\alpha, 2 - \alpha] \cup [2a, 4 - 2a]\big] \cup [a + 2, 4 - a] \\ &= \max\big[\max\big[[\alpha, 2 - \alpha], [2a, 4 - 2a]\big], [a + 2, 4 - a]\big] \\ &= \max\big[[\max[\alpha, 2\alpha], \max[2 - \alpha, 4 - 2\alpha]], [\alpha + 2, 4 - \alpha]\big] \\ &= [\max[\max[\alpha, 2\alpha], \alpha + 2], \max[\max[2 - \alpha, 4 - 2\alpha], 4 - \alpha]] \\ &= [\max[\alpha, 2\alpha, \alpha + 2], \max[2 - \alpha, 4 - 2\alpha, 4 - \alpha]]\end{aligned}$$

Dapat diketahui max[α,$2\alpha, \alpha + 2$] yaitu $\alpha + 2$ untuk $\alpha \in [0,1]$ dan max[2-α, $4 - 2\alpha, 4 - \alpha$] yaitu $4 - \alpha$ untuk $\alpha \in [0,1]$.

Sehingga

$$(1_\alpha \cup 2_\alpha) \cup 3_\alpha = \{\alpha + 2, 4 - \alpha\}.$$

Kemudian,

$$\begin{aligned}1_\alpha \cup (2_\alpha \cup 3_\alpha) &= [x, 2 - \alpha] \cup \big[[2a, 4 - 2a] \cup [a + 2, 4 - a]\big] \\ &= \max\Big[[\alpha, 2 - \alpha], \max\big[[2\alpha, 4 - 2\alpha], [a + 2, 4 - a]\big]\Big] \\ &= \max\big[[\alpha, 2 - \alpha], [\max[2\alpha, \alpha + 2], \max[4 - 2\alpha, 4 - \alpha]]\big] \\ &= [\max[\alpha, \max[2\alpha, \alpha + 2]], \max[2 - \alpha, \max[4 - 2\alpha, 4 - \alpha]]] \\ &= [\max[\alpha, 2\alpha, \alpha + 2], \max[2 - \alpha, 4 - 2\alpha, 4 - \alpha]]\end{aligned}$$

Dapat diketahui max[α,$2\alpha, \alpha + 2$] yaitu $\alpha + 2$ jika $\alpha \in [0,1]$ dan max[2-α, $4 - 2\alpha, 4 - \alpha$] yaitu $4 - \alpha$ jika $\alpha \in [0,1]$.

Sehingga diperoleh

$$1_\alpha \cup (2_\alpha \cup 3_\alpha) = \{\alpha + 2, 4 - \alpha\}.$$

Dengan demikian terbukti bahwa $(1_\alpha \cup 2_\alpha) \cup 3_\alpha = 1_\alpha \cup (2_\alpha \cup 3_\alpha)$.

Sifat Idempoten Irisan.

Untuk setiap himpunan fuzzy A_α dengan fungsi keanggotaan segitiga, maka berlaku $A_\alpha \cap A_\alpha = A_\alpha$.

Bukti.

Ambil sebarang $A_\alpha \in \mathcal{R}$ dengan $A_\alpha = [(b - a)\alpha + a, c - (c - b)\alpha]$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Misalkan

$(b - a)\alpha + a = x$

$c - (c - b)\alpha = y$

Dimana $x, y \in \mathbb{R}$, maka

$$
\begin{aligned}
A_\alpha \cap A_\alpha &= \min[A_\alpha, A_\alpha] \\
&= \min\big[[x,y],[x,y]\big] \\
&= \big[\min[x,x], \min[y,y]\big] \\
&= [x,y] \\
&= A_\alpha
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, terbukti bahwa operasi irisan bersifat idempoten.

Contoh 3.5:

Misalkan bilangan fuzzy $\widetilde{2}$ mempunyai fungsi keanggotaan segitiga sebagai berikut:

$$
\mu_{\widetilde{2}}(x) = \text{segitiga } (x; 0,2,4) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & ,0 \le x \le 2 \\ \dfrac{4-x}{2} & ,2 \le x \le 4 \\ 0 & x \le 0 \text{ atau } x \ge 4, \end{cases}
$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x}{2}$ diperoleh $x = 2\alpha$ dan $\alpha = \frac{4-x}{2}$ diperoleh $x = 4 - 2\alpha$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\check{2}$ untuk $\alpha \in [0,1]$ yaitu,

$$
\begin{aligned}
2_\alpha &= [2\alpha, 4 - 2\alpha] \\
2_\alpha \cap 2\alpha &= [2\alpha, 4-2\alpha] \cap [2\alpha, 4-2\alpha] \\
&= \min\big[[2\alpha, 4-2\alpha], [2\alpha, 4-2\alpha]\big] \\
&= [\min[2\alpha, 2\alpha], \min[4-2\alpha, 4-2\alpha]] \\
&= [2\alpha, 4-2\alpha] \\
&= 2_\alpha.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $2_\alpha \cup 2_\alpha = 2_\alpha$.

Sifat Idempoten Gabungan.

Untuk setiap himpunan fuzzy A_α dengan fungsi keanggotaan segitiga, maka berlaku $A_\alpha \cup A_\alpha = A_\alpha$.

Bukti.

Ambil sebarang $A_\alpha \in \mathcal{R}$ dengan $A_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c - (c-b)\alpha]$ dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Misalkan

$(b-a)\alpha + a = x$

$c - (c-b)\alpha = y$

Dimana $x, y \in \mathbb{R}$, maka

$$
\begin{aligned}
A_\alpha \cup A_\alpha &= \max[A_\alpha, A_\alpha] \\
&= \max\big[[x,y],[x,y]\big] \\
&= \big[\max[x,x], \max[y,y]\big] \\
&= [x,y] \\
&= A_\alpha
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, terbukti bahwa operasi gabungan bersifat idempoten.

Contoh 3.6:

Misalkan bilangan fuzzy $\widetilde{2}$ mempunyai fungsi keanggotaan segitiga sebagai berikut:

$$
\mu_{\widetilde{2}}(x) = \text{segitiga } (x; 0,2,4) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & ,0 \le x \le 2 \\ \dfrac{4-x}{2} & ,2 \le x \le 4 \\ 0 & x \le 0 \text{ atau } x \ge 4, \end{cases}
$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x}{2}$ diperoleh $x = 2\alpha$ dan $\alpha = \frac{4-x}{2}$ diperoleh $x = 4 - 2\alpha$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\check{2}$ untuk $\alpha \in [0,1]$ yaitu,

$$
\begin{aligned}
2_\alpha &= [2\alpha, 4 - 2\alpha] \\
2_\alpha \cup 2_\alpha &= [2\alpha, 4-2\alpha] \cup [2\alpha, 4-2\alpha] \\
&= \max\big[[2\alpha, 4-2\alpha], [2\alpha, 4-2\alpha]\big] \\
&= [\max[2\alpha, 2\alpha], \max[4-2\alpha, 4-2\alpha]] \\
&= [2\alpha, 4-2\alpha] \\
&= 2_\alpha.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $2_\alpha \cup 2_\alpha = 2_\alpha$.

Sifat Absorpsi Terhadap Operasi Gabungan.

Untuk setiap himpunan fuzzy A_α dan B_α dengan fungsi keanggotaan segitiga, maka berlaku $A_\alpha \cap (A_\alpha \cup B_\alpha) = A_\alpha$.

Bukti.

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha \in \mathcal{R}$ dengan $A_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha]$ dan $B_\alpha = [(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha]$ dimana $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$.

Misalkan

$(b-a)\alpha + a = x$

$c-(c-b)\alpha = y$

$(e-d)\alpha + d = z$

$f-(f-e)\alpha = w$

Dimana $x,y,z,w \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned}
A_\alpha \cap (A_\alpha \cup B_\alpha) &= \min\big[A_\alpha, \max[A_\alpha, B_\alpha]\big] \\
&= \min[[x,y], \max\big[[x,y],[z,w]\big]] \\
&= \min\Big[[x,y], \big[\max[x,z], \max[y,w]\big]\Big] \\
&= \Big[\min\big[x, \max[x,z]\big], \min\big[y, \max[y,w]\big]\Big] \\
&= [x,y] \\
&= A_\alpha
\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa operasi irisan bersifat absorpsi.

Contoh 3.7:

Misalkan bilangan fuzzy $\tilde{2}$ dan $\tilde{3}$ mempunyai fungsi keanggotaan segitiga sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{2}}(x) = \text{segitiga } (x; 0,2,4) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{2} & ,0 \le x \le 2 \\ \dfrac{4-x}{2} & ,2 \le x \le 4 \\ 0 \ \ x \le 0 \text{ atau } x \ge 4, \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x}{2}$ diperoleh $x = 2\alpha$ dan $\alpha = \frac{4-x}{2}$ diperoleh $x = 4 - 2\alpha$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\check{2}$ untuk $\alpha \in [0,1]$ yaitu,

$$2_\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha]$$

Sedangkan

$$\mu_{\tilde{3}}(x) = \text{segitiga } (x; 2,3,4) = \begin{cases} x-2 & ,2 \le x \le 3 \\ 4-x & ,3 \le x \le 4 \\ 0 & ,x < 2 \text{ atau } x \ge 4 \end{cases}$$

Dengan menyatakan $\alpha = x - 2$ diperoleh $x = \alpha + 2$ dan $\alpha = 4 - x$ diperoleh $x = 4 - \alpha$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\tilde{3}$ untuk $\alpha \in [0,1]$ yaitu

$$3_\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha].$$

Maka

$$\begin{aligned}
2_\alpha \cap (2_\alpha \cup 3_\alpha) &= \min\big[[2\alpha, 4-2\alpha], [\max[2\alpha, 4-2\alpha], [\alpha+2, 4-\alpha]\big] \\
&= \min[2\alpha, 4-2\alpha], \ [\max[2\alpha, \alpha+2], \max[4-2\alpha, 4-\alpha]] \\
&= \min[2\alpha, \max[2\alpha, \alpha+2]], \min[[4-2\alpha, \max[4-2\alpha, 4-\alpha]]
\end{aligned}$$

Dari uraian tersebut, maka dapat diketahui $\max[2\alpha, \alpha+2]$ yaitu $\alpha + 2$ jika $\alpha \in [0,1]$ dan $\max[4-2\alpha, 4-\alpha]$ yaitu $4-\alpha$ jika $\alpha \in [0,1]$. Serta $\min[2\alpha, \alpha+2]$ yaitu 2α jika $\alpha \in [0,1]$ dan $\min[4-2\alpha, 4-\alpha]$ yaitu $4-2\alpha$ jika $\alpha \in [0,1]$.

Sehingga

$$\begin{aligned}
2_\alpha \cap (2_\alpha \cup 3_\alpha) &= [\min[2\alpha, \alpha+2], \min[4-2\alpha, 4-\alpha]] \\
&= [2\alpha, 4-2\alpha] \\
&= 2_{\alpha.}
\end{aligned}$$

Dengan demikian dapat terbukti bahwa $2_\alpha \cap (2_\alpha \cup 3_\alpha) = 2_\alpha$ bersifat absorpsi terhadap operasi gabungan.

Sifat Absorpsi Terhadap Operasi Irisan.

Untuk setiap himpunan fuzzy A_α dan B_α dengan fungsi keanggotaan segitiga, maka berlaku $A_\alpha \cup (A_\alpha \cap B_\alpha) = A_\alpha$.

Bukti.

Ambil sebarang $A_\alpha, B_\alpha \in \mathcal{R}$ dengan $A_\alpha = [(b-a)\alpha + a, c-(c-b)\alpha]$ dan $B_\alpha = [(e-d)\alpha + d, f-(f-e)\alpha]$ dimana $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$.

Misalkan

$(b-a)\alpha + a = x$

$c-(c-b)\alpha = y$
$(e-d)\alpha + d = z$
$f-(f-e)\alpha = w$
Dimana $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, maka

$$
\begin{aligned}
A_\alpha \cup (A_\alpha \cap B_\alpha) &= \max\left[A_\alpha, \min[A_\alpha, B_\alpha]\right] \\
&= \max\left[[x,y], \min\left[[x,y],[z,w]\right]\right] \\
&= \max\left[[x,y], \left[\min[x,z], \max[y,w]\right]\right] \\
&= \left[\max[x, \min[x,z]], \max[y, \min[y,w]]\right] \\
&= [x,y] \\
&= A_\alpha
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, terbukti bahwa operasi gabungan bersifat absorpsi.

Contoh 3.8:

Misalkan bilangan fuzzy $\tilde{2}$ dan $\tilde{3}$ mempunyai fungsi keanggotaan segitiga sebagai berikut:

$$
\mu_{\tilde{2}}(x) = \text{segitiga } (x; 0,2,4) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & , 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{4-x}{2} & , 2 \le x \le 4 \\ 0 \quad x \le 0 \text{ atau } x \ge 4, & \end{cases}
$$

Dengan menyatakan $\alpha = \frac{x}{2}$ diperoleh $x = 2\alpha$ dan $\alpha = \frac{4-x}{2}$ diperoleh $x = 4-2\alpha$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\check{2}$ untuk $\alpha \in [0,1]$ yaitu,

$$
2_\alpha = [2\alpha, 4-2\alpha]
$$

Sedangkan

$$
\mu_{\tilde{3}}(x) = \text{segitiga } (x; 2,3,4) = \begin{cases} x-2 & , 2 \le x \le 3 \\ 4-x & , 3 \le x \le 4 \\ 0 & , x < 2 \text{ atau } x \ge 4 \end{cases}
$$

Dengan menyatakan $\alpha = x-2$ diperoleh $x = \alpha + 2$ dan $\alpha = 4-x$ diperoleh $x = 4-\alpha$, dapat dinyatakan dalam $\alpha - cut$ dari $\tilde{3}$ untuk $\alpha \in [0,1]$ yaitu

$$
3_\alpha = [\alpha+2, 4-\alpha].
$$

Maka

$$
\begin{aligned}
2_\alpha \cup (2_\alpha \cap 3_\alpha) &= \max\left[[2\alpha, 4-2\alpha], [\min[2\alpha, 4-2\alpha], [\alpha+2, 4-\alpha]]\right] \\
&= \max\left[[2\alpha, 4-2\alpha], [\min[2\alpha, \alpha+2], \min[4-2\alpha, 4-\alpha]]\right] \\
&= \left[\max[2\alpha, \min[2\alpha, \alpha+2]], \max[[4-2\alpha, \min[4-2\alpha, 4-\alpha]]\right]
\end{aligned}
$$

Dapat diketahui $\min[2\alpha, \alpha+2]$ yaitu 2α jika $\alpha \in [0,1]$ dan $\min[4-2\alpha, 4-\alpha]$ yaitu $4-2\alpha$ jika $\alpha \in [0,1]$. Sehingga

$$
\begin{aligned}
2_\alpha \cup (2_\alpha \cap 3_\alpha) &= [\max[2\alpha, 2\alpha], \max[4-2\alpha, 4-2\alpha]] \\
&= [2\alpha, 4-2\alpha] \\
&= 2_\alpha.
\end{aligned}
$$

Dengan demikian dapat terbukti bahwa $2_\alpha \cup (2_\alpha \cap 3_\alpha) = 2_\alpha$ bersifat absorpsi terhadap operasi irisan.

Sehingga, Teorema 3.1 terbukti benar bahwa jika $\mathcal{R}$ merupakan himpunan semua himpunan fuzzy, ia merupakan latis dengan dua operasi biner ∩ dan ∪ yang memenuhi 4 (empat) sifat yang telah dibuktikan.

4. KESIMPULAN

Dari penelitian ini, terbukti bahwa himpunan fuzzy secara fungsi keanggotaan segitiga dengan dua operasi irisan dan gabungan merupakan latis yang memenuhi sifat-sifat dalam teori latis, yaitu:

(e.) $A_\alpha \cap B_\alpha = B_\alpha \cap A_\alpha$,
$A_\alpha \cup B_\alpha = B_\alpha \cup A_\alpha$ *(komutatif).*

(f.) $(A_\alpha \cap B_\alpha) \cap C_\alpha = A_\alpha \cap (B_\alpha \cap C_\alpha)$,
$(A_\alpha \cup B_\alpha) \cup C_\alpha = A_\alpha \cup (B_\alpha \cup C_\alpha)$ *(Asosiatif).*

(g.) $A_\alpha \cap A_\alpha = A_\alpha$,
$A_\alpha \cup A_\alpha = A_\alpha$ *(Idempoten).*

(h.) $A_\alpha \cap (A_\alpha \cup B_\alpha) = A_\alpha$,
$A_\alpha \cup (A_\alpha \cap B_\alpha) = A_\alpha$ *(Absorpsi).*

Dengan demikian, dapat dikatakan deskripsi operasi himpunan fuzzy dalam teori latis merupakan operasi himpunan yang dapat dinyatakan ke dalam empat sifat tersebut.

5. UCAPAN TERIMAKASIH

Ucapan terimakasih kami sampaikan kepada Ibu Evawati Alisah yang mendampingi penelitian ini hingga selesai. Serta kepada pihak penyelenggara simanis yang telah memberikan kesempatan bagi kami untuk dapat mempublikasikan tulisan ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Grätzer, George. 2010. *Lattice Theory: Fundamental*. Berlin: Birkhäuser.
[2] Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
[3] Kusumadewi, Sri dan Hari, Purnomo. 2010. “Aplikasi Logika Fuzzy”, Cetakan Pertama. Yogyakarta: Graha Ilmu.
[4] Nair, Latha S. *Applications of Fuzzy Sets on Lattice Theory*. Vol. 2012. Artikel 8 halaman.
[5] Neyman, Shelvie N. 2012. *http://shelvie.staff.ipb.ac.id/.* Diakses pada tanggal 15 Maret 2019.