

Analisis Numerik Penyebaran Panas Pada Batang Baja 1-Dimensi Menggunakan Skema Beda Hingga Kompak

Rofila El Maghfiroh, Rif'atul Khusniah, Moch. Sholeh, Marjono, Dwi Ratnaningsih
Jurusan Teknik Sipil, Politeknik Negeri Malang
rofila.elma@gmail.com, rifatulkhusniahkurniawan231@gmail.com, moch.sholeh@polinema.ac.id,
maryono_mt@yahoo.co.id, dwiratna.polinema@gmail.com

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 21 Oktober 2019
Direvisi: 18 November 2019
Diterbitkan: 15 Januari 2020

Kata Kunci:

Batang Baja
Penyebaran Panas
Skema Beda Hingga Kompak

ABSTRAK

Dalam bidang konstruksi, baja sangat sering digunakan, contohnya adalah untuk pembangunan gedung dan pembangunan sarana transportasi. Salah satu proses pengolahan baja yang sering ditemui adalah proses perlakuan panas pada baja. Perlakuan panas pada suatu baja mengakibatkan terjadinya perpindahan panas.

Pada kasus tertentu, fenomena perpindahan panas menjadi hal yang sangat penting untuk diamati. Hal tersebut dikarenakan adanya beberapa komponen memiliki kerentanan terhadap perubahan suhu yang mengakibatkan terjadinya penyebaran panas. Salah satu cara untuk mengamati penyebaran panas adalah dengan analisis numerik.

Skema beda hingga kompak pada metode Crank-Nicolson menghasilkan solusi numerik pada persamaan konduksi panas yang diterapkan pada batang baja 1-dimensi. Analisis solusi numerik dilakukan di level waktu tertentu. Skema beda hingga kompak pada metode Crank-Nicolson memberikan solusi numerik dengan tingkat akurasi yang sangat tinggi.

Copyright © 2019 SIMANIS.
All rights reserved.

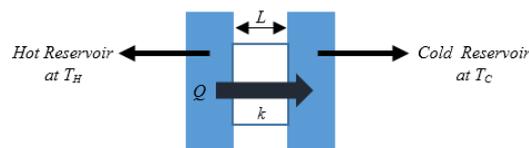
Korespondensi:

Rofila El Maghfiroh, Rif'atul Khusniah, Moch. Sholeh, Marjono, Dwi Ratnaningsih
Jurusan Teknik Sipil,
Politeknik Negeri Malang,
Jl. Soekarno-Hatta No. 9 Malang, Jawa Timur, Indonesia 65141
rofila.elma@gmail.com, rifatulkhusniahkurniawan231@gmail.com, moch.sholeh@polinema.ac.id,
maryono_mt@yahoo.co.id, dwiratna.polinema@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Logam dan paduan logam memiliki banyak manfaat di bidang teknik. Besi dan paduannya (terutama baja) memberikan sekitar 90% dari produksi logam di dunia, karena kombinasi keduanya sangat kuat dan tangguh serta memiliki *ductility* yang baik dengan biaya relatif rendah [1]. Saat ini, konstruksi baja menjadi pilihan favorit sebagai salah satu jenis material bangunan-bangunan modern. Dalam konstruksi bangunan, banyak sekali kelebihan material baja daripada jenis material yang lain. Baja merupakan perpaduan antara besi dan karbon. Bila besi dipadu dengan karbon disebut baja (*steel*), akan tetapi bila besi dipadu dengan logam lain disebut baja paduan (*alloy steel*). Baja dapat dibedakan menjadi beberapa jenis sesuai dengan kandungan karbonnya. Unsur paduan lain yang biasa ditambahkan selain karbon adalah mangan (*manganese*), krom (*chromium*), *vanadium*, dan *tungsten*. Berdasarkan variasi kandungan karbon dan unsur paduan lainnya, didapatkan berbagai jenis kualitas baja. Semakin banyak kandungan karbonnya, maka baja semakin keras (*hardness*) dan kuat tariknya (*tensile strength*) meningkat, tetapi di sisi lain membuatnya menjadi getas (*brittle*) dan sifat daktilitasnya berkurang [2].

Mengingat banyak sekali kelebihan material baja, sangat penting mengetahui ketahanan panas pada material baja tersebut. Oleh karena itu, analisis penyebaran panas pada material baja perlu dilakukan. Jika suatu bahan berbentuk batang dan menyentuh sumber panas pada salah satu ujungnya, maka ujung yang lain dari bahan tersebut akan terasa semakin panas, walaupun tidak ada kontak langsung dengan sumber panas. Interaksi yang menyebabkan perubahan suhu ini pada dasarnya adalah perpindahan energi dari suatu bahan ke bahan yang lain. Perpindahan energi yang hanya terjadi karena perbedaan suhu disebut aliran panas atau perpindahan panas, sedangkan energi yang dipindahkan disebut panas [3]. Perpindahan energi terjadi dari sistem bersuhu tinggi ke sistem yang bersuhu rendah [4]. Panas mampu meningkatkan amplitude getaran atom dan elektron dalam sistem, energi panas akan dipindahkan saat terjadi tabrakan antar atom yang berdekatan. Pada material padat panas dapat dipindahkan tanpa disertai perpindahan massa sistem [5]. Jadi dapat dikatakan bahwa panas adalah sesuatu yang dapat berpindah antara sistem dan lingkungannya hanya sebagai akibat dari perbedaan suhu, sedangkan perpindahan energi yang timbul dari perbedaan suhu antara bagian-bagian material yang berdekatan disebut konduksi panas [6]. Konduksi panas diilustrasikan sebagai berikut.



Gambar 1. Ilustrasi perpindahan panas konduksi

Q adalah panas yang dipindahkan, L adalah ketebalan bahan dan k adalah konstanta konduktivitas termal [7]. Nilai k tergantung pada bahan. Bahan dengan k yang besar adalah konduktor panas yang baik, bahan dengan k yang kecil adalah konduktor panas yang buruk [3]. Berikut ini adalah nilai konstanta konduktivitas termal suatu bahan [6].

Tabel 1. Konstanta konduktivitas termal

	kcal/s.m. $^{\circ}$ C
METALS	
<i>Aluminium</i>	$4,9 \times 10^{-2}$
<i>Brass</i>	$2,6 \times 10^{-2}$
<i>Copper</i>	$9,2 \times 10^{-2}$
<i>Lead</i>	$8,3 \times 10^{-3}$
<i>Silver</i>	$9,9 \times 10^{-2}$
<i>Steel</i>	$1,1 \times 10^{-2}$
GASES	
<i>Air</i>	$5,7 \times 10^{-6}$
<i>Hydrogen</i>	$3,3 \times 10^{-5}$
<i>Oxygen</i>	$5,6 \times 10^{-6}$
OTHERS	
<i>Asbestos</i>	2×10^{-5}
<i>Concrete</i>	2×10^{-4}
<i>Cork</i>	4×10^{-5}
<i>Glass</i>	2×10^{-4}
<i>Ice</i>	4×10^{-4}
<i>Wood</i>	2×10^{-5}

Pada penelitian ini, ditentukan solusi numerik persamaan konduksi panas pada batang baja satu dimensi untuk mengetahui pola perpindahan panas batang baja homogen dengan asumsi tanpa sumber panas. Persamaan konduksi panas satu dimensi diselesaikan secara numerik dengan metode Crank-Nicolson. Untuk selanjutnya, pada metode Crank-Nicolson, skema beda hingga pusat digunakan untuk menentukan pendekatan turunan tingkat satu terhadap variabel waktu dan skema beda hingga kompak akan digunakan dalam menentukan pendekatan turunan tingkat dua terhadap variabel ruang. Skema beda hingga kompak merupakan suatu skema implisit dan memberikan tingkat akurasi yang tinggi [8], [9], [10], [11]. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan solusi numerik perpindahan panas konduksi pada batang baja 1-dimensi dan mengetahui tingkat akurasi skema beda hingga kompak pada metode Crank-Nicolson.

2. METODE PENELITIAN

Persamaan konduksi panas dapat diaplikasikan untuk menganalisis perpindahan panas secara konduksi, salah satu contohnya adalah untuk mengetahui penyebaran panas pada material baja. Pada penelitian ini, diasumsikan terdapat sebuah batang baja homogen, sehingga konstanta konduktivitas termalnya sama di setiap titik. Batang baja tersebut memiliki panjang L dan luas penampang melintang yang sama di setiap titik.

Panas pada batang hanya keluar dari ujung batang, karena kondisi pada sekeliling permukaan batang tersebut diisolasi, sehingga tidak ada panas yang keluar melalui permukaan batang [12].

Selain itu, pada penelitian ini diasumsikan suhu pada ujung kanan dan kiri batang diketahui nilainya, sehingga syarat batas yang digunakan adalah syarat batas Dirichlet. Syarat awal yang digunakan masih dalam bentuk persamaan matematika. Oleh karena itu, permasalahan di atas dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan konduksi panas 1-dimensi dengan syarat awal dan syarat batas sebagai berikut.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; 0 < x < L, t < 0, \quad (2.1)$$

dengan syarat awal

$$u(x,0) = f(x); 0 < x < L, \quad (2.2)$$

dan syarat batas Dirichlet

$$u(0,t) = u_A(t), u(L,t) = u_B(t); t > 0, \quad (2.3)$$

dengan $u(x,t)$ adalah suhu di titik x saat waktu t dan k adalah konstanta konduktivitas termal.

Solusi numerik persamaan (2.1) diperoleh dengan menggunakan metode Crank-Nicolson. Turunan tingkat satu terhadap variabel waktu akan didekati dengan skema beda hingga pusat, sedangkan turunan tingkat dua terhadap variabel ruang akan didekati dengan skema beda hingga kompak.

2.1. Skema Pendekatan Terhadap Variabel Waktu

Turunan tingkat satu terhadap variabel waktu pada persamaan (2.1) akan didekati dengan skema beda hingga pusat berorde dua sebagai berikut [13].

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t_{n+\frac{1}{2}}} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (2.4)$$

2.2. Skema Pendekatan Terhadap Variabel Ruang

Turunan tingkat dua terhadap variabel ruang pada persamaan (2.1) akan didekati dengan skema beda hingga kompak berorde empat sebagai berikut.

$$\frac{1}{12}u''_{i-1} + \frac{10}{12}u''_i + \frac{1}{12}u''_{i+1} = -\frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) + O(h^4) \quad (2.5)$$

Skema pada persamaan (2.5) mempunyai tingkat akurasi tinggi, karena skema tersebut berorde empat. Selain itu, persamaan tersebut juga dapat dikatakan kompak, karena memerlukan informasi dari *grid point* di sekitar i , yaitu *grid point* $i-1$ dan $i+1$. Skema pada persamaan (2.5) disebut skema beda hingga kompak [12]. Skema beda hingga kompak bersifat global, karena untuk mendapatkan nilai turunan fungsi di suatu *grid point*, diperlukan nilai fungsi dan nilai turunan fungsi di semua *grid point* [9].

Dalam pembahasan selanjutnya, skema beda hingga kompak pada persamaan (2.5) akan dibandingkan dengan skema beda hingga pusat sebagai berikut.

$$u''_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + O(h^2) \quad (2.6)$$

Skema pada persamaan (2.6) berorde dua [13]. Skema beda hingga kompak mempunyai tingkat akurasi yang lebih tinggi jika dibandingkan dengan skema beda hingga pusat. Hal ini dikarenakan, dengan *grid point* yang sama, orde skema beda hingga kompak lebih tinggi dari pada orde skema beda hingga pusat.

2.3. Metode Crank-Nicolson

Pada metode Crank-Nicolson, untuk persamaan (2.1), nilai pendekatan u_t menggunakan skema beda hingga pusat, sedangkan nilai pendekatan u_{xx} menggunakan nilai rata-rata dari u_{xx} di *grid point* x_i saat t_n dan t_{n+1} [13]. Oleh karena itu, diperoleh skema pendekatan Crank-Nicolson untuk persamaan (2.1) adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} w^{(n+1)} &= (I + rA^{-1}B)^{-1} (I - rA^{-1}B)w^{(n)} - (I + rA^{-1}B)^{-1} rA^{-1}D(b^{(n)} + b^{(n+1)}) \\ &\quad - (I + rA^{-1}B)^{-1} A^{-1}C(b^{(n+1)} - b^{(n)}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

dengan

$$r = \frac{k\Delta t}{2h^2}$$

$$w^{(n)} \approx \left(u_1^n \quad u_2^n \quad \dots \quad u_{M-1}^n \quad u_M^n \right)^T \quad b^{(n)} = \left(u_A(t_n) \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad u_B(t_n) \right)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{10}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{10}{12} & \frac{1}{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{12} & \frac{10}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{12} & \frac{10}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

skema pada persamaan (2.7) digunakan untuk menentukan solusi numerik dari persamaan konduksi panas 1-dimensi (2.1) [12].

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk membuktikan tingkat akurasi dari skema beda hingga kompak, maka akan ditentukan solusi numerik dari suatu persamaan diferensial dengan syarat awal dan syarat batas Dirichlet serta asumsi tanpa sumber panas sebagai berikut,

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t); \quad 0 < x < 1, \quad t < 0 \quad (3.1)$$

dengan syarat awal

$$u(x,0) = \sin(\pi x); \quad 0 < x < 1 \quad (3.2)$$

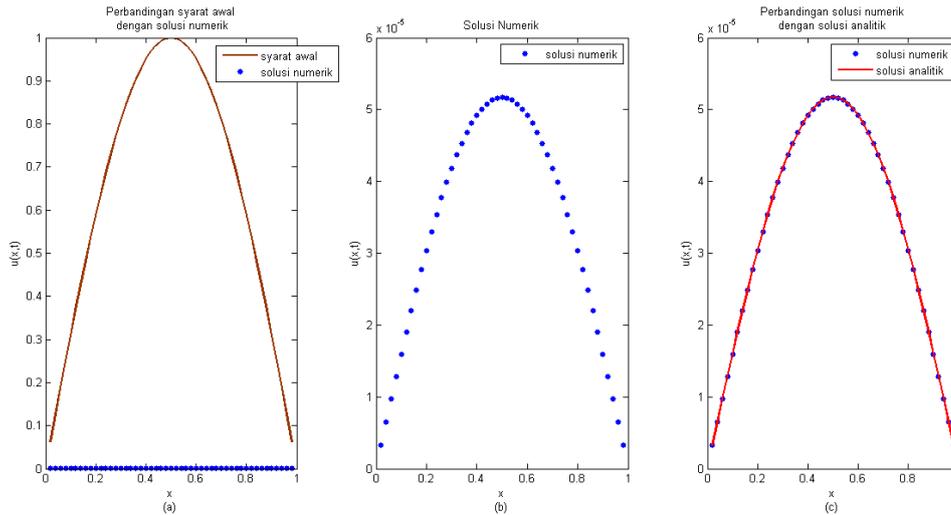
dan syarat batas

$$u(0,t) = u(1,t) = 0; \quad t > 0 \quad (3.3)$$

tingkat akurasi skema beda hingga kompak diperoleh dengan membandingkan solusi numerik persamaan (3.1) dengan solusi analitiknya. Solusi analitik persamaan (3.1) adalah sebagai berikut.

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x) \quad (3.4)$$

Berikut ini adalah perbandingan solusi numerik dari persamaan (3.1) dengan menggunakan skema beda hingga kompak dan solusi analitiknya.

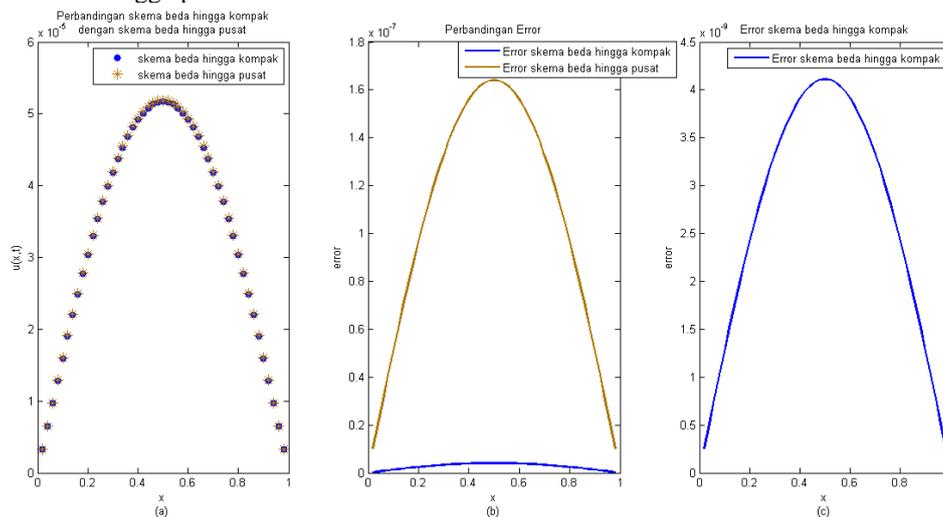


Gambar 2. Solusi numerik dan solusi analitik

Berdasarkan Gambar 2(a), dengan bertambahnya level waktu, jika dibandingkan dengan syarat awal, maka solusi numerik persamaan (3.1) semakin mendekati nol. Hal ini dikarenakan batang homogen melepaskan panas dari kondisi awal hingga menyesuaikan dengan kondisi lingkungannya. Perilaku ini sesuai dengan asumsi sebelumnya, bahwa tidak terdapat sumber panas. Gambar 2(b) menunjukkan hasil solusi numerik pada level waktu tertentu, sedangkan Gambar 2(c) menunjukkan perbandingan solusi numerik dan solusi analitik. Sesuai dengan Gambar 2(c), solusi numerik sangat mendekati solusi analitiknya dengan tingkat kesalahan atau *error* yang sangat kecil.

Selanjutnya, solusi numerik yang diperoleh dari skema beda hingga kompak akan dibandingkan dengan solusi numerik yang diperoleh dari skema beda hingga pusat. Hal ini perlu dilakukan untuk mengetahui tingkat akurasi dari skema beda hingga kompak. Solusi numerik dengan skema beda hingga kompak menggunakan persamaan (2.5) dalam menentukan nilai pendekatan turunan tingkat dua terhadap variabel ruang, sedangkan solusi numerik dengan skema beda hingga pusat menggunakan persamaan (2.6) dalam menentukan nilai pendekatan turunan tingkat dua terhadap variabel ruang.

Berikut adalah solusi numerik persamaan (3.1) jika dibandingkan antara skema beda hingga kompak dengan skema beda hingga pusat.



Gambar 3. Perbandingan solusi numerik dengan skema beda hingga kompak dan skema beda hingga pusat

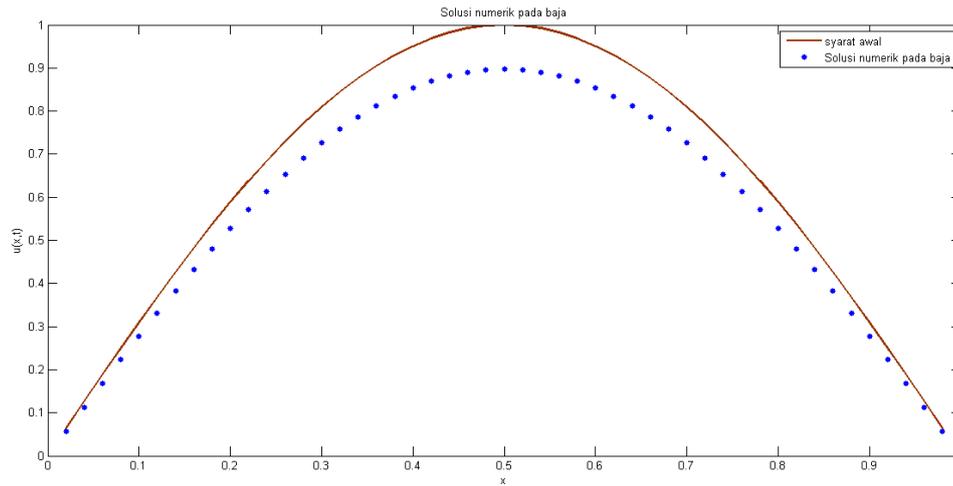
Dari Gambar 3(a), perbedaan yang didapatkan antara solusi numerik skema beda hingga kompak dengan skema beda hingga pusat cukup kecil. Meskipun perbedaan yang dihasilkan cukup kecil, tetapi skema beda hingga kompak memberikan *error* yang lebih kecil daripada skema beda hingga pusat, seperti pada Gambar 3(b). Hal ini sesuai dengan teori yang telah dikemukakan sebelumnya, yaitu skema beda hingga kompak mempunyai tingkat akurasi yang lebih tinggi jika dibandingkan dengan skema beda hingga pusat,

karena dengan *grid point* yang sama, orde skema beda hingga kompak lebih tinggi dari pada orde skema beda hingga pusat. Gambar 3(c) merupakan perbesaran dari *error* pada skema beda hingga kompak. Oleh karena itu, dapat dikatakan untuk pengukuran yang sangat kecil, skema beda hingga kompak memberikan hasil yang lebih akurat jika dibandingkan dengan skema beda hingga pusat, karena *error* yang dihasilkan sangat kecil.

Pembahasan selanjutnya adalah akan ditentukan solusi numerik dari persamaan konduksi panas pada suatu bahan dengan asumsi tanpa sumber panas berikut ini,

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) ; 0 < x < 1 , t < 0 \tag{3.5}$$

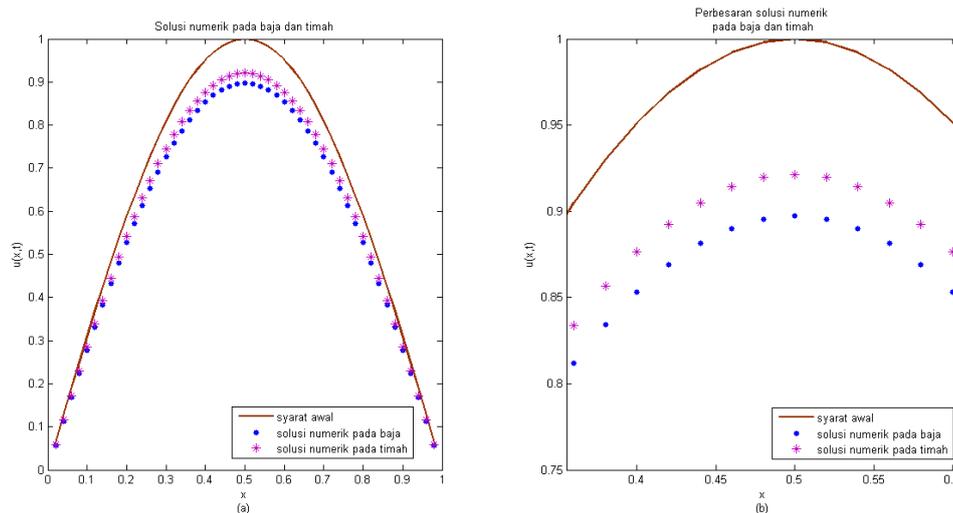
dengan syarat awal sesuai persamaan (3.2) dan syarat batas sesuai persamaan (3.3) serta k adalah konstanta konduktivitas termal bahan tersebut. Berikut adalah solusi numerik persamaan (3.5) pada baja. Perlu diperhatikan bahwa konstanta konduktivitas termal baja adalah $k = 1,1 \times 10^{-2}$ kcal/s.m°C [6].



Gambar 4. Solusi numerik persamaan (3.5) pada baja

Berdasarkan Gambar 4, pada level waktu tertentu, batang baja homogen melepaskan panas menyesuaikan dengan kondisi lingkungannya, karena tidak terdapat sumber panas.

Berikut adalah hasil solusi numerik persamaan (3.5) jika dibandingkan dengan bahan yang lain, yaitu timah dengan konstanta konduktivitas termal lebih kecil. Perlu diperhatikan bahwa konstanta konduktivitas termal timah adalah $k = 8,3 \times 10^{-3}$ kcal/s.m°C [6].

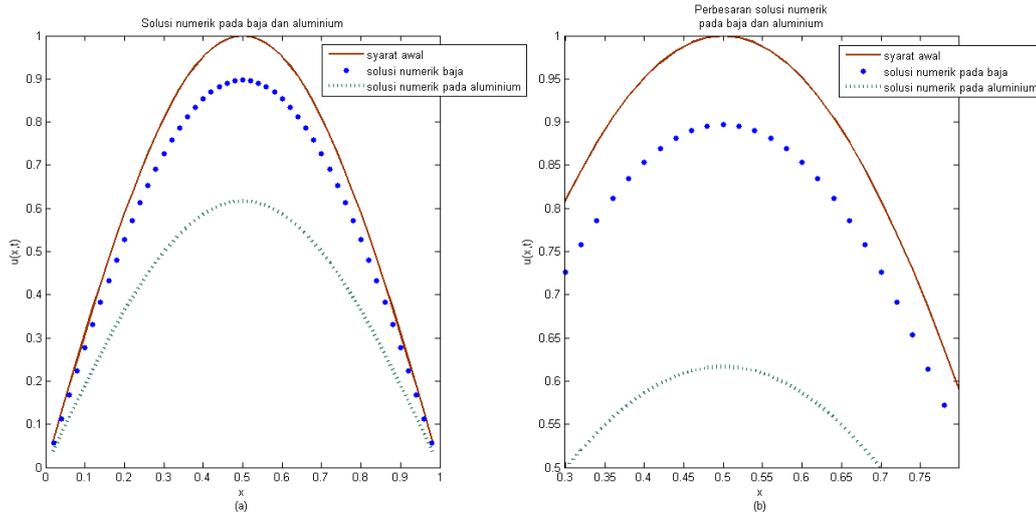


Gambar 5. Solusi numerik persamaan (3.5) pada baja dan timah

Seperti pada pembahasan sebelumnya, berdasarkan Gambar 5, pada level waktu tertentu, baja dan timah melepaskan panas dari kondisi awal menyesuaikan dengan kondisi lingkungannya, karena tidak terdapat sumber panas. Tetapi baja lebih cepat melepaskan panas dibandingkan timah, karena konstanta konduktivitas termal baja lebih besar dibandingkan konstanta konduktivitas termal timah.

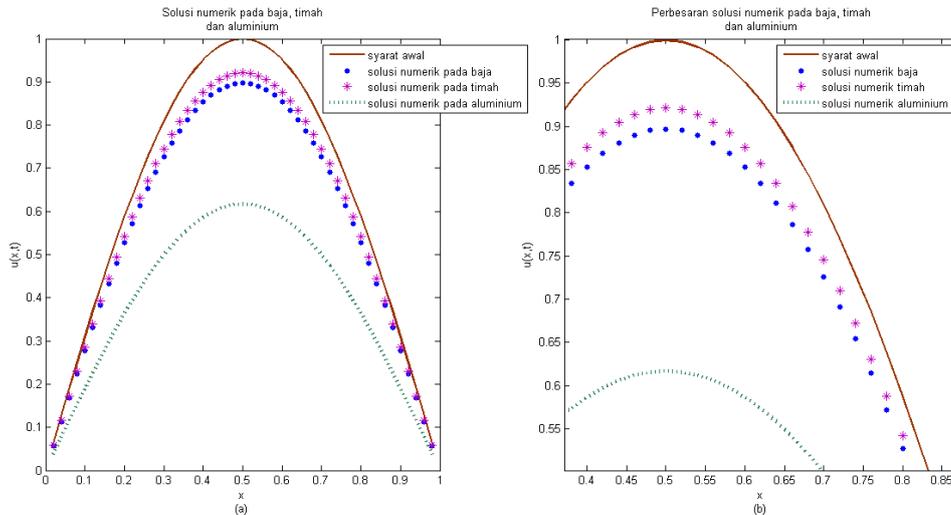
Selain dibandingkan dengan timah, solusi numerik pada baja juga akan dibandingkan dengan aluminium. Berikut adalah hasil solusi numerik pada aluminium dengan konstanta konduktivitas termal lebih

besar daripada konstanta konduktivitas termal baja dan timah. Perlu diperhatikan bahwa konstanta konduktivitas termal aluminium adalah $k = 4,9 \times 10^{-2}$ kcal/s.m°C.



Gambar 6. Solusi numerik persamaan (3.5) pada baja dan aluminium

Pada level waktu tertentu, baja dan aluminium melepaskan panas dari kondisi awal menyesuaikan dengan kondisi lingkungannya, karena tidak terdapat sumber panas, sesuai dengan Gambar 6. Aluminium lebih cepat melepaskan panas dibandingkan baja, karena konstanta konduktivitas termal baja lebih kecil dibandingkan konstanta konduktivitas termal aluminium. Berikut adalah gabungan solusi numerik dari baja, timah dan aluminium.



Gambar 7. Solusi numerik persamaan (3.5) pada baja, timah dan aluminium

Berdasarkan Gambar 7, aluminium lebih cepat melepaskan panas dibandingkan baja dan timah, sedangkan timah tidak mudah melepaskan panas dibandingkan baja dan aluminium. Hal ini dipengaruhi oleh konstanta konduktivitas termal dari baja, timah dan aluminium. Semakin besar konstanta konduktivitas termal suatu bahan, maka bahan tersebut akan mudah melepaskan panas. Sebaliknya, semakin kecil konstanta konduktivitas termal suatu bahan, maka bahan tersebut akan sulit melepaskan panas.

4. KESIMPULAN

Skema beda hingga kompak pada metode Crank-Nicolson memberikan solusi numerik persamaan konduksi panas dengan tingkat akurasi yang sangat tinggi. Penyebaran panas yang terjadi pada suatu bahan sesuai dengan konstanta konduktivitas termal bahan tersebut. Semakin besar nilai konstanta konduktivitas termal suatu bahan, maka semakin mudah melepaskan panas. Pada baja dengan nilai konstanta konduktivitas termal $k = 1,1 \times 10^{-2}$ kcal/s.m°C, lebih cepat melepaskan panas jika dibandingkan dengan timah yang konstanta

konduktivitas termalnya adalah $k = 8,3 \times 10^{-3}$ kcal/s.m°C. Tetapi aluminium dengan konstanta konduktivitas termal $k = 4,9 \times 10^{-2}$ kcal/s.m°C lebih cepat melepaskan panas dibandingkan dengan baja.

5. UCAPAN TERIMAKASIH

Terima kasih disampaikan kepada Politeknik Negeri Malang yang telah mendanai keberlangsungan penelitian ini dalam Dana Penelitian DIPA Reguler Politeknik Negeri Malang.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Smith, W. F. and Hashemi, J., *Foundations of Materials Science and Engineering*. Fourth Edition. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc., 2006.
- [2] Nurlina, S., *Teknologi Bahan I*. Malang: Bargie Media. 2011.
- [3] Young, H. D. and Freedman, R. A., *Sears dan Zemansky. Fisika Universitas*. Edisi Kesepuluh. Jilid I. Jakarta: Erlangga, 2002.
- [4] Holman, J.P., *Heat Transfer*. Tenth Edition. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc., 2010.
- [5] Halliday, D., Resnick, R., and Walker, J., *Fundamental of Physics*. Ninth Edition. USA: John Wiley & Sons, Inc., 2011.
- [6] Halliday, D. and Resnick, R., *Physics Parts 1 and 2*. Third Edition. Combined Edition. Canada: John Wiley and Sons, 1978.
- [7] Halliday, D., et al., *Fundamental Of Physics*. Fifth Edition. Canada: John Wiley and Sons, 1997.
- [8] Han, F. and Dai, W., "New Higher-Order Compact Finite Difference Schemes for 1D Heat Conduction Equations", *Applied Mathematical Modelling*, vol.37, pp.7940-7952. 2013.
- [9] Moin, P., *Fundamentals of Engineering Numerical Analysis*. New York: Cambridge University Press., 2010.
- [10] Shah, A., et al., "Upwind Compact Finite Difference Scheme for Time-Accurate Solution of The Incompressible Navier-Stokes Equation", *Applied Mathematics and Computation*, vol.215, pp.3201-3213. 2010.
- [11] Shukla, R. K. and Zhong, X., "Derivation of High-Order Compact Finite Difference Schemes for Non-Uniform Grid Using Polynomial Interpolation", *Journal of Computational Physics*, vol.204, pp.404-429. 2005.
- [12] Maghfiroh, R. E., dan Zaman, M. B., "Simulasi Numerik Perpindahan Panas Konduksi 1-Dimensi dengan Syarat Batas Dirichlet Menggunakan Skema Beda Hingga Kompak", Proc.Seminar Nasional dan Pembelajarannya 2016, Universitas Negeri Malang, pp.1290-1297, Agustus 2016.
- [13] Humi and Miller, *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*. Boston: PWS-KENT Publishing Company, 1992.