

Penerapan Metode Runge-Kutta Fehlberg pada Model Sistem Pegas Massa Dua Derajat Kebebasan dengan Redaman

Fadilatil Zikri, M. Yusuf Fajar, Gani Gunawan
Program Studi Matematika, Universitas Islam Bandung
fadilazikri8@gmail.com, myusuffajar@yahoo.com, ggan06@yahoo.com

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 21 Oktober 2019

Direvisi: 18 November 2019

Diterbitkan: 15 Januari 2020

Kata Kunci:

Persamaan Diferensial
Sistem Persamaan Diferensial
Sistem Pegas Massa
Runge-Kutta Fehlberg

ABSTRAK

Banyak fenomena alam yang model matematikanya berupa persamaan diferensial khususnya sistem persamaan diferensial, yaitu sistem pegas massa dua derajat kebebasan dengan redaman. Sistem pegas massa dua derajat kebebasan dengan redaman merupakan sistem pegas massa dua koordinat yang bergerak secara terus menerus dan akan kembali ke posisi semula dengan memberikan redaman. Penyelesaian untuk menggambarkan perilaku gerak sistem pegas massa secara analitik mengalami kesulitan sehingga penyelesaian dilakukan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta Fehlberg. Metode Runge-Kutta Fehlberg merupakan metode yang digunakan untuk persamaan diferensial dengan mengevaluasi fungsi pada titik-titik yang terpilih yang dipengaruhi oleh ordenya dimana semakin besar ordenya maka hasil akan semakin teliti. Berdasarkan hasil simulasi, bahwa semakin besar konstanta pegas yang diberikan maka amplitudo getaran yang terjadi semakin kecil, semakin besar redaman yang diberikan maka amplitudo getaran yang terjadi semakin mendekati nilai setimbang atau kembali ke posisi semula, dan jika diberikan gaya luar terhadap massa maka amplitudo getaran yang terjadi akan terus berosilasi secara harmonik meskipun ada redaman.

*Copyright © 2019 SIMANIS.
All rights reserved.*

Korespondensi:

Fadilatil Zikri,
Program Studi Matematika,
Universitas Islam Bandung,
Jl. Tamansari No.1 Bandung, Jawa Barat, Indonesia 40116
fadilazikri8@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Banyak fenomena alam yang model matematikanya berupa persamaan diferensial. Penyelesaian dari persamaan-persamaan tersebut dapat berupa penyelesaian analitik maupun numerik. Penyelesaian secara numerik merupakan penyelesaian yang paling diharapkan jika permasalahan sulit diselesaikan secara analitik karena kompleksnya suatu permasalahan. Salah satu contoh yang terkait dengan fenomena-fenomena alam yang sering dimodelkan yaitu sistem getaran pegas massa.

Nurvia [1] melakukan penelitian terkait dengan model getaran satu massa atau satu koordinat bebas dengan dua pegas tanpa adanya redaman dan pengaruh gaya luar. Terdapat jumlah koordinat bebas untuk menentukan gerakan atau perubahan posisi setiap sistem yang dinamakan derajat kebebasan (*degree of freedom*). Bila suatu sistem membutuhkan dua koordinat untuk menggambarkan gerakannya, maka sistem di katakan mempunyai dua derajat kebebasan.

Adanya gerakan atau adanya perubahan posisi setiap sistem akan menimbulkan suatu getaran-getaran yang seringkali bergerak secara terus menerus maka dari itu untuk memberhentikan dan mengembalikan ke posisi semula atau setimbang diberikan gaya lain untuk menghambat laju benda tersebut yang sering disebut dengan redaman. Salah satu teknik dalam penyelesaian sistem getaran pegas massa dua derajat kebebasan dengan redaman adalah dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta.

Tingkat ketelitian dari metode Runge-Kutta dipengaruhi oleh ordenya, dimana semakin besar ordenya maka akan semakin teliti hasil yang diperoleh [2]. Keluarga metode Runge-Kutta tersebut mencakup Metode Runge-Kutta Fehlberg. Berdasarkan uraian di atas, identifikasi masalah yang akan dibahas adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penjabaran metode Runge-Kutta Fehlberg?
2. Bagaimana penerapan metode Runge-Kutta Fehlberg dalam menyelesaikan model sistem pegas massa dua derajat kebebasan?
3. Bagaimana hasil penerapan dari metode Runge-Kutta Fehlberg pada model sistem pegas massa dua derajat kebebasan?
4. Bagaimana pengaruh konstanta pegas, redaman, dan gaya luar yang diberikan terhadap amplitudo getaran?

2. KAJIAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensial

Waluya [3] menyatakan bahwa persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang mengandung turunan atau diferensial dan relasi antara *derivative* dari suatu peubah tak bebas terhadap satu atau lebih peubah bebas. Bentuk umum persamaan diferensial orde pertama adalah

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = f(x, y(x)); \quad a \leq x \leq b; \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

dimana nilai x berada di antara interval a dan b dengan nilai awal yang diberikan.

2.2. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan suatu sistem yang melibatkan dua atau lebih variabel tak bebas (misalnya $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$) dimana masing-masing darinya merupakan suatu fungsi dari suatu variabel bebas (misalnya t). Bentuk umum sistem dari persamaan diferensial linear orde pertama adalah

$$\begin{aligned} u_1' &= a_{11}(t)u_1 + a_{12}(t)u_2 + \dots + a_{1n}(t)u_n + b_1(t) \\ u_2' &= a_{21}(t)u_1 + a_{22}(t)u_2 + \dots + a_{2n}(t)u_n + b_2(t) \\ u_3' &= a_{31}(t)u_1 + a_{32}(t)u_2 + \dots + a_{3n}(t)u_n + b_3(t) \\ &\vdots \\ u_n' &= a_{n1}(t)u_1 + a_{n2}(t)u_2 + \dots + a_{nn}(t)u_n + b_n(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Dimana jika setiap fungsi $b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)$ tak nol untuk semua t dalam interval I maka sistem persamaan diferensial dinamakan tak homogen.

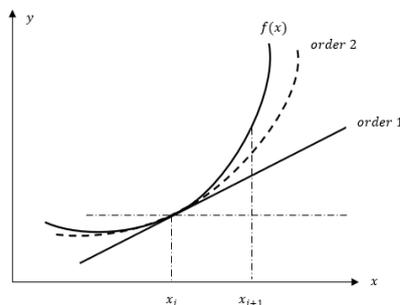
2.3. Teorema Taylor

Teorema Taylor digunakan untuk mencari polinomial sebagai nilai pendekatan dari fungsi yang terdiferensial. Deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi yang benar, jika semua suku dari deret tersebut diperhitungkan.

Bentuk umum Deret Taylor adalah sebagai berikut:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^n(x_i) + E_n \quad (3)$$

Jika suatu fungsi $f(x)$ diketahui di titik x_i dan semua turunan f terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret Taylor dapat dinyatakan nilai f pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i seperti pada Gambar 1. sebagai berikut:



Gambar 1. Pendekatan Taylor untuk Persamaan Diferensial Biasa

Menurut Chapra [4], teorema Taylor dapat dinyatakan secara khusus bahwa setiap fungsi dapat diperkirakan sebagai polinomial dengan membangun seri Taylor seperti pada Gambar 1. Persyaratan tambahan dari seri Taylor yang dikembangkan adalah menjadi persamaan diferensial fungsi dua variabel sehingga bentuk umum Deret Taylor untuk fungsi dua variabel adalah sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i, y_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(x_i, y_i) + \mathcal{O}(h^{n+1}) \quad (4)$$

2.4. Teori Graf

Graph t didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) , ditulis dengan notasi $t=(V,E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul [2].

Dalam konsep teori graph terdapat konsep pohon (*tree*), pohon adalah graph tak-berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Pada kebanyakan aplikasi pohon, simpul tertentu diperlakukan sebagai akar (*root*). Sekali sebuah simpul ditetapkan sebagai akar, maka simpul-simpul lainnya dapat dicapai dari akar dengan memberi arah pada sisi-sisi pohon yang mengikutinya.

Terdapat beberapa definisi dari pohon berakar (*rooted tree*), antara lain [5]:

- Orde** merupakan jumlah titik-titik yang ada pada pohon berakar (*rooted tree*).
- Bobot elementer** ($\Phi(t)$) merupakan jumlah dari semua hasil kali label-label yang diberikan.
- Kepadatan** ($\gamma(t)$) merupakan perkalian dari semua bilangan bulat yang dicantumkan pada titik-titik *rooted tree* berorde [6].

2.5. Pemodelan Matematika

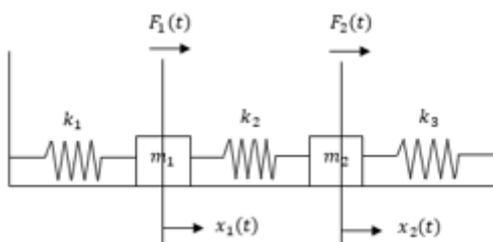
Pemodelan matematika adalah proses dalam menurunkan model matematika dari suatu fenomena berdasarkan asumsi-asumsi yang digunakan. Proses ini merupakan langkah awal yang tak terpisahkan dalam menerapkan matematika untuk mempelajari fenomena-fenomena alam, ekonomi, sosial maupun fenomena-fenomena lainnya [7].

Model matematika dapat berbentuk linier maupun non linier tergantung pada persoalan yang dikaji. Namun terkadang terdapat beberapa kasus model linier yang tidak dapat diselesaikan secara analitik sehingga diperlukannya penyelesaian numerik untuk mendapatkan solusi yang diinginkan [8].

2.6. Teori Getaran Mekanis

Gerak osilasi merupakan gerakan suatu benda atau sistem mekanik yang berubah secara berkala atau periodik yang melalui titik kesetimbangan [9]. Getaran termasuk gerak osilasi dari suatu sistem yang dapat berupa gerakan beraturan atau tidak beraturan. Getaran dapat dikelompokkan menjadi dua bagian yaitu berdasarkan ada tidaknya eksitasi dan berdasarkan derajat kebebasannya [10]. Suatu benda yang mengalami getaran selalu mempunyai posisi kesetimbangan yang stabil.

2.7. Sistem Pegas Massa Dua Derajat Kebebasan



Gambar 2. Sistem Pegas Massa Dua Derajat Kebebasan [3]

Sistem pegas massa terbentuk dari dua massa yang dikaitkan pada tiga pegas dengan arah yang horizontal seperti pada Gambar 2. dimana bila suatu sistem pegas massa membutuhkan dua koordinat untuk menggambarkan gerakannya, maka sistem pegas massa dikatakan mempunyai dua derajat kebebasan. Sebuah sistem dengan dua derajat kebebasan akan mempunyai dua frekuensi natural.

Bila getaran bebas terjadi pada salah satu frekuensi natural ini, maka hubungan yang pasti terjadi antara amplitudo-amplitudo kedua koordinat dan konfigurasi dinyatakan sebagai ragam normal (*normal mode*). Amplitudo koordinat digambarkan dari besar kecilnya osilasi suatu gelombang, yang didefinisikan sebagai jarak atau simpangan terjauh dari titik kesetimbangan dalam gelombang sinusoidal. Sistem dua derajat kebebasan ini akan mempunyai dua getaran ragam normal sesuai dengan kedua frekuensi natural [11].

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada persamaan (1), dalam pendekatan numerik akan dicari fungsi y yang tidak diketahui dengan melakukan integrasi $f'(x, y)$ ditulis dalam bentuk umum sebagai berikut [4]:

$$\text{Nilai baru} = \text{nilai lama} + \text{slope (kemiringan)} \times \text{step size (} h \text{)} \quad (5)$$

atau dalam bentuk persamaan matematika ditulis sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (6)$$

dimana slope ϕ adalah fungsi inkremen, yaitu cara untuk merepresentasikan slope (kemiringan) pada setiap interval. Metode Runge-Kutta termasuk ke dalam keluarga metode iteratif implisit dan eksplisit dan merupakan metode yang

digunakan pada persamaan diferensial dalam rangka meniru hasil dari pendekatan deret Taylor tanpa harus melakukan diferensial analitik berulang kali, yaitu dengan mengevaluasi fungsi pada titik-titik yang terpilih. Menurut Harahap [12], metode iteratif merupakan metode yang diselesaikan secara berulang-ulang untuk mendapatkan solusinya.

Tingkat ketelitian dari metode Runge-Kutta dipengaruhi oleh ordenya, dimana semakin besar ordenya maka akan semakin teliti hasil yang diperoleh [2].

3.1. Penjabaran Metode Runge-Kutta Fehlberg Orde Lima

Metode ini dijabarkan dengan menggunakan Tabel 1 yang diperoleh dari penyederhanaan persamaan (4) untuk orde yang lebih tinggi sebagai berikut:

Tabel 1. *Rooted Tree* Orde Satu sampai Orde Lima

Orde	Rooted Tree	Φ	$\frac{1}{\gamma}$
1	•	$\sum_{i=1}^s b_i$	$\frac{1}{1}$
2	!	$\sum_{i=1}^s b_i c_i$	$\frac{1}{2}$
3	∨	$\sum_{i=1}^s b_i c_i^2$	$\frac{1}{3}$
	!	$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j$	$\frac{1}{6}$
4	∨∨	$\sum_{i=1}^s b_i c_i^3$	$\frac{1}{4}$
	∨∨	$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j$	$\frac{1}{8}$
	Y	$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j^2$	$\frac{1}{12}$
	!	$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} c_k$	$\frac{1}{24}$
5	∨∨∨	$\sum_{i=1}^s b_i c_i^4$	$\frac{1}{5}$
	∨∨∨	$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i^2 a_{ij} c_j$	$\frac{1}{10}$
	∨∨∨	$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j^2$	$\frac{1}{15}$
	∨∨∨	$\sum_{i,j,k=1}^s b_i c_i a_{ij} a_{jk} c_k$	$\frac{1}{30}$
	∨∨	$\sum_{i=1}^s b_i \left(\sum_{j=1}^s a_{ij} c_j \right)^2$	$\frac{1}{20}$
	Y	$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j^3$	$\frac{1}{20}$
	Y	$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k$	$\frac{1}{40}$
	Y	$\sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} c_k^2$	$\frac{1}{60}$
	!	$\sum_{i,j,k,l=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} c_l$	$\frac{1}{120}$

Dengan menggunakan Tabel 1 maka diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 1 \tag{7}$$

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 + b_5 c_5 + b_6 c_6 = \frac{1}{2} \tag{8}$$

$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 + b_4 c_4^2 + b_5 c_5^2 + b_6 c_6^2 = \frac{1}{3} \tag{9}$$

$$b_3 a_{32} c_2 + b_4 a_{42} c_2 + b_4 a_{43} c_3 + b_5 a_{52} c_2 + b_5 a_{53} c_3 + b_5 a_{54} c_4 + b_6 a_{62} c_2 + b_6 a_{63} c_3 + b_6 a_{64} c_4 + b_6 a_{65} c_5 = \frac{1}{6} \tag{10}$$

$$b_2c_2^3 + b_3c_3^3 + b_4c_4^3 + b_5c_5^3 + b_6c_6^3 = \frac{1}{4}$$

$$b_3c_3a_{32}c_2 + b_4c_4a_{42}c_2 + b_4c_4a_{43}c_3 + b_5c_5a_{52}c_2 + b_5c_5a_{53}c_3 + b_5c_5a_{54}c_4 + b_6c_6a_{62}c_2 + b_6c_6a_{63}c_3 + b_6c_6a_{64}c_4 + b_6c_6a_{65}c_5 = \frac{1}{8} \quad (12)$$

$$b_3a_{32}c_2^2 + b_4a_{42}c_2^2 + b_4a_{43}c_3^2 + b_5a_{52}c_2^2 + b_5a_{53}c_3^2 + b_5a_{54}c_4^2 + b_6a_{62}c_2^2 + b_6a_{63}c_3^2 + b_6a_{64}c_4^2 + b_6a_{65}c_5^2 = \frac{1}{12} \quad (13)$$

$$b_4a_{43}a_{32}c_2 + b_5a_{54}a_{43}c_3 + b_6a_{65}a_{54}c_4 = \frac{1}{24} \quad (14)$$

$$b_2c_2^4 + b_3c_3^4 + b_4c_4^4 + b_5c_5^4 + b_6c_6^4 = \frac{1}{5} \quad (15)$$

$$b_3c_3^2a_{32}c_2 + b_4c_4^2a_{42}c_2 + b_4c_4^2a_{43}c_3 + b_5c_5^2a_{52}c_2 + b_5c_5^2a_{53}c_3 + b_5c_5^2a_{54}c_4 + b_6c_6^2a_{62}c_2 + b_6c_6^2a_{63}c_3 + b_6c_6^2a_{64}c_4 + b_6c_6^2a_{65}c_5 = \frac{1}{10} \quad (16)$$

$$b_3c_3a_{32}c_2^2 + b_4c_4a_{42}c_2^2 + b_4c_4a_{43}c_3^2 + b_5c_5a_{52}c_2^2 + b_5c_5a_{53}c_3^2 + b_5c_5a_{54}c_4^2 + b_6c_6a_{62}c_2^2 + b_6c_6a_{63}c_3^2 + b_6c_6a_{64}c_4^2 + b_6c_6a_{65}c_5^2 = \frac{1}{15} \quad (17)$$

$$b_4c_4a_{43}a_{32}c_2 + b_5c_5a_{54}a_{42}c_2 + b_5c_5a_{54}a_{43}c_3 + b_6c_6a_{65}a_{52}c_2 + b_6c_6a_{65}a_{53}c_3 + b_6c_6a_{65}a_{54}c_4 = \frac{1}{30} \quad (18)$$

$$b_3a_{32}^2c_2^2 + b_4a_{42}^2c_2^2 + b_4a_{43}^2c_3^2 + b_5a_{52}^2c_2^2 + b_5a_{53}^2c_3^2 + b_5a_{54}^2c_4^2 + b_6a_{62}^2c_2^2 + b_6a_{63}^2c_3^2 + b_6a_{64}^2c_4^2 + b_6a_{65}^2c_5^2 = \frac{1}{20} \quad (19)$$

$$b_3a_{32}c_2^3 + b_4a_{42}c_2^3 + b_4a_{43}c_3^3 + b_5a_{52}c_2^3 + b_5a_{53}c_3^3 + b_5a_{54}c_4^3 + b_6a_{62}c_2^3 + b_6a_{63}c_3^3 + b_6a_{64}c_4^3 + b_6a_{65}c_5^3 = \frac{1}{20} \quad (20)$$

$$b_4a_{43}c_3a_{32}c_2 + b_5a_{53}c_3a_{32}c_2 + b_5a_{54}c_4a_{42}c_2 + b_5a_{54}c_4a_{43}c_3 + b_6a_{63}c_3a_{32}c_2 + b_6a_{64}c_4a_{42}c_2 + b_6a_{64}c_4a_{43}c_3 + b_6a_{65}c_5a_{52}c_2 + b_6a_{65}c_5a_{53}c_3 + b_6a_{65}c_5a_{54}c_4 = \frac{1}{40} \quad (21)$$

$$b_4a_{43}a_{32}c_2^2 + b_5a_{53}a_{32}c_2^2 + b_5a_{54}a_{42}c_2^2 + b_5a_{54}a_{43}c_3^2 + b_6a_{63}a_{32}c_2^2 + b_6a_{64}a_{42}c_2^2 + b_6a_{64}a_{43}c_3^2 + b_6a_{65}a_{52}c_2^2 + b_6a_{65}a_{53}c_3^2 + b_6a_{65}a_{54}c_4^2 = \frac{1}{60} \quad (22)$$

$$b_6a_{65}a_{54}a_{43}c_3 = \frac{1}{120} \quad (23)$$

Dari persamaan (7)-(23), terdapat tujuh belas persamaan dan dua puluh enam variabel bebas sehingga bentuk umum yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{16}{135}k_1h + \frac{6656}{12825}k_3h + \frac{28561}{56430}k_4h - \frac{9}{50}k_5h + \frac{2}{55}k_6h$$

dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1h\right)$$

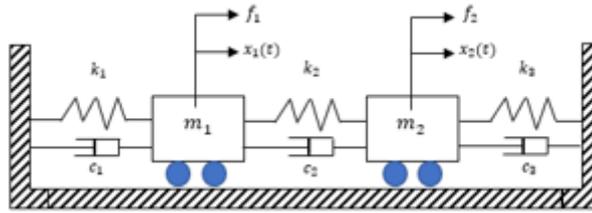
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{3}{8}h, y_i + \frac{3}{32}k_1h + \frac{3}{32}k_2h\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + \frac{12}{13}h, y_i + \frac{1932}{2197}k_1h - \frac{7200}{2197}k_2h + \frac{7296}{2197}k_3h\right)$$

$$k_5 = f\left(x_i + h, y_i + \frac{439}{216}k_1h - 8k_2h + \frac{3680}{513}k_3h - \frac{845}{4104}k_4h\right)$$

$$k_6 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{27}k_1h + 2k_2h - \frac{3544}{2565}k_3h + \frac{1859}{4104}k_4h - \frac{11}{40}k_5h\right)$$

3.2. Model Sistem Pegas Massa Dua Derajat Kebebasan dengan Redaman



Gambar 3. Sistem Pegas Massa Dua Derajat Kebebasan dengan Redaman

Pada Gambar 3. dijelaskan bahwa terdapat dua massa yaitu massa m_1 dan massa m_2 yang dihubungkan dengan tiga konstanta pegas, yaitu k_1 adalah konstanta pegas pertama, k_2 adalah konstanta pegas kedua, dan k_3 adalah konstanta pegas ketiga yang masing-masing mempunyai redaman, yaitu c_1 adalah redaman pertama, c_2 adalah redaman kedua, dan c_3 adalah redaman ketiga yang bergerak secara horizontal, dimana $x_1(t)$ adalah simpang getar atau posisi massa m_1 pada setiap waktu t dari keadaan setimbang yang diberikan gaya luar sebesar $f_1 = F_0 \sin(t)$ dan $x_2(t)$ adalah simpang getar atau posisi massa m_2 pada setiap waktu t dari keadaan setimbang yang diberikan gaya luar sebesar $f_2 = F_0 \sin(t)$ secara berturut-turut. Menurut [13], Gambar 2. memiliki model matematika sebagai berikut:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) - c_2 \dot{x}_2(t) + (c_1 + c_2) \dot{x}_1(t) + (k_1 + k_2) x_1(t) - k_2 x_2(t) = f_1 \\ m_2 \ddot{x}_2(t) + (c_3 + c_2) \dot{x}_2(t) - c_2 \dot{x}_1(t) + (k_2 + k_3) x_2(t) - k_2 x_1(t) = f_2 \end{cases} \quad (24)$$

Model matematika tersebut berbentuk sistem persamaan diferensial orde dua tak homogen.

3.3. Penerapan Metode Runge-Kutta Fehlberg pada Model Sistem Pegas Massa Dua Derajat Kebebasan dengan Redaman

Dalam menerapkan metode Runge-Kutta Fehlberg pada model sistem pegas massa dua derajat kebebasan dengan redaman adalah melakukan konversi persamaan (24) menjadi sistem persamaan orde satu, sebagai berikut: Misalkan $r = x_1$; $s = \dot{x}_1$; $v = x_2$; dan $w = \dot{x}_2$ maka diperoleh

$$\begin{cases} \dot{r} = s \\ \dot{s} = \ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1} (f_1 + c_2 w - (c_1 + c_2) s - (k_1 + k_2) r + k_2 v) \\ \dot{v} = w \\ \dot{w} = \ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2} (f_2 + c_2 s - (c_2 + c_3) w - (k_2 + k_3) v - k_2 r) \end{cases}$$

Dengan memberikan kondisi awal $r(0) = 5$, $s(0) = 0$, $v(0) = 10$, $w(0) = 0$, dan $h = 0.05$ maka persamaan tersebut akan menggambarkan pergerakan amplitudo getaran yang terjadi.

Formulasi yang digunakan untuk penyelesaian persamaan di atas adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{r}_{i+1} &= r_i + \frac{16}{135} l_1 + \frac{6656}{12825} l_3 + \frac{28561}{56430} l_4 - \frac{9}{50} l_5 + \frac{2}{55} l_6 \\ \hat{s}_{i+1} &= s_i + \frac{16}{135} p_1 + \frac{6656}{12825} p_3 + \frac{28561}{56430} p_4 - \frac{9}{50} p_5 + \frac{2}{55} p_6 \\ \hat{v}_{i+1} &= v_i + \frac{16}{135} q_1 + \frac{6656}{12825} q_3 + \frac{28561}{56430} q_4 - \frac{9}{50} q_5 + \frac{2}{55} q_6 \\ \hat{w}_{i+1} &= w_i + \frac{16}{135} z_1 + \frac{6656}{12825} z_3 + \frac{28561}{56430} z_4 - \frac{9}{50} z_5 + \frac{2}{55} z_6 \end{aligned}$$

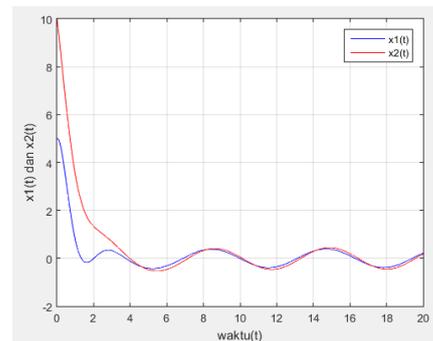
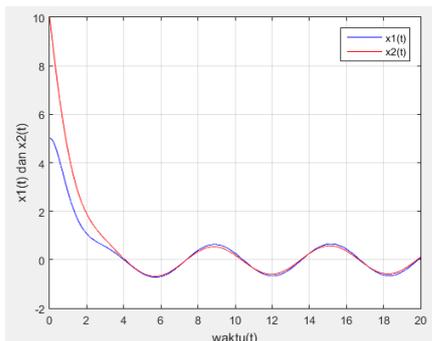
3.4. Hasil Penerapan Metode Runge-Kutta Fehlberg pada Model Sistem Pegas Massa Dua Derajat Kebebasan dengan Redaman

Dengan memberikan koefisien-koefisien pada model sistem pegas massa dilakukan simulasi untuk menggambarkan perilaku gerak sistem getaran pegas massa terhadap amplitudo getaran dengan memberikan beberapa kondisi, yaitu:

Kondisi 1. Jika konstanta pegas (k_1) diperkecil dan diperbesar dengan konstanta pegas yang lain, massa, redaman, dan gaya luar yang diberikan tetap, sebagai berikut:

Massa (m) kg	Redaman (c) Ns/m	Gaya Luar (f) N
$m_1 = 2$ $m_2 = 2$	$c_1 = 4$ $c_2 = 3$ $c_3 = 4$	$f_1 = 3\sin(t)$ $f_2 = 3\sin(t)$
Konstanta pegas (k) N/m	Kondisi	Waktu (t)
$k_1 = 4$	$k_2 = 4$	$t = 20$ s
$k_1 = 10$	$k_3 = 4$	

Pengaruh konstanta pegas



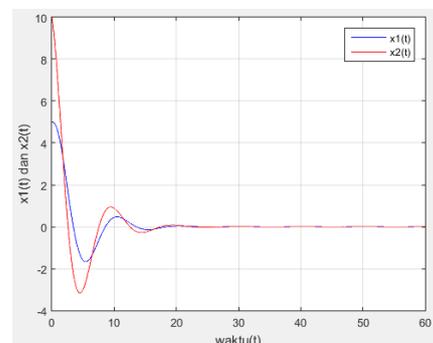
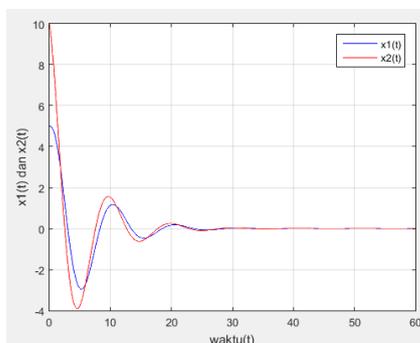
Gambar 4. Simulasi pengaruh konstanta pegas $k_1 = 4$ Gambar 5. Simulasi pengaruh konstanta pegas $k_1 = 10$

Dari hasil simulasi, diperoleh bahwa pengaruh k_1 yang sebarang terhadap amplitudo getaran adalah semakin besar konstanta pegas yang diberikan maka amplitudo getaran yang terjadi semakin kecil atau berbanding terbalik dengan amplitudo getaran, dan sebaliknya.

Kondisi 2. Jika redaman (c_1) diperkecil dan diperbesar dengan redaman yang lain, massa, konstanta pegas dan gaya luar yang diberikan tetap, sebagai berikut:

Massa (m) kg	Konstanta pegas (k) N/m	Gaya Luar (f) N
$m_1 = 10$ $m_2 = 10$	$k_1 = 2$ $k_2 = 5$ $k_3 = 5$	$f_1 = 0$ $f_2 = 0$
Redaman (c) Ns/m	Kondisi	Waktu (t)
$c_1 = 8$	$c_2 = 6$	$t = 60$ s
$c_1 = 12$	$c_3 = 1$	

Pengaruh redaman



Gambar 6. Simulasi pengaruh redaman $c_1 = 8$

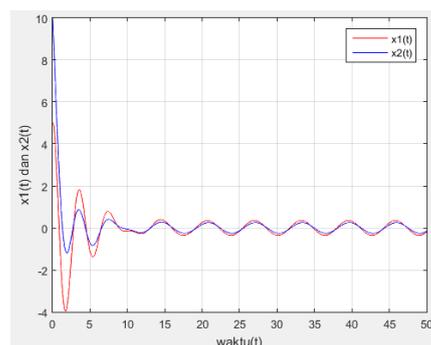
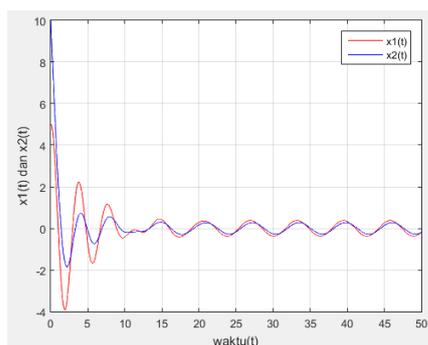
Gambar 7. Simulasi pengaruh redaman $c_1 = 12$

Dari hasil simulasi, diperoleh bahwa pengaruh c_1 yang sebarang terhadap amplitudo getaran adalah semakin besar redaman yang diberikan maka amplitudo getaran yang terjadi semakin mendekati nilai setimbang (mendekati titik nol) atau sistem pegas massa kembali ke posisi semula.

Kondisi 3. Jika gaya luar (f_1) yang diberikan gaya sinusoidal terhadap massa dengan konstanta pegas dan redaman tetap, sebagai berikut:

Massa (m) kg	Konstanta pegas (k) N/m	Redaman (c) Ns/m
$m_1 = 2$ $m_2 = 2$	$k_1 = 3$ $k_2 = 4$ $k_3 = 4$	$c_1 = 2$ $c_2 = 3$ $c_3 = 4$
Gaya Luar (f) N	Kondisi	Waktu (t)
$f_1 = 3\sin(t)$ $f_1 = 1.5\sin(t)$	$f_2 = 3\sin(t)$	$t = 50$ s

Pengaruh gaya luar



Gambar 8. Simulasi pengaruh gaya luar $f_1 = 3\sin(t)$ Gambar 9. Simulasi pengaruh gaya luar $f_1 = 1.5\sin(t)$

Dari hasil simulasi, diperoleh bahwa pengaruh f_1 yang sebarang terhadap amplitudo getaran adalah sistem akan terus berosilasi secara harmonik meskipun ada redaman.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah diteliti dan dikaji, maka dapat disimpulkan bahwa penjabaran Metode Runge-Kutta Fehlberg menggunakan pola *rooted tree* untuk menyederhanakan bentuk ekspansi deret Taylor orde yang lebih tinggi dalam mencari bentuk umum yang digunakan untuk menyelesaikan model sistem pegas massa.

Penerapan metode Runge-Kutta Fehlberg dalam menyelesaikan model kasus sistem getaran pegas massa dua derajat kebebasan dengan redaman yaitu dengan mengkonversi bentuk sistem persamaan diferensial orde dua menjadi sistem persamaan orde satu.

Berdasarkan hasil simulasi kemudian di analisis, bahwa semakin besar konstanta pegas yang diberikan maka amplitudo getaran yang terjadi semakin kecil, semakin besar redaman yang diberikan maka amplitudo getaran yang terjadi semakin mendekati nilai setimbang atau kembali ke posisi semula, dan jika diberikan gaya luar terhadap massa maka amplitudo getaran yang terjadi pada sistem akan terus berosilasi secara harmonik meskipun ada redaman.

5. UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Bapak M. Yusuf Fajar, Drs., M.Si. dan Bapak Gani Gunawan, M.Si. selaku pembimbing yang telah bersedia meluangkan waktunya dan memberikan pengarahan serta bimbingan dalam penyelesaian artikel ini, dan penulis mengucapkan terimakasih kepada pihak-pihak terkait yang telah memberikan dukungan baik secara langsung maupun tidak langsung dalam penyelesaian artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] M. Nurvia, G. Gunawan dan Y. Permanasari, "Simulasi Model Penyelesaian Getaran Dua Pegas Tersusun Seri dan Paralel melalui Transformasi Laplace," *Prosiding Matematika UNISBA*, pp. 27-31, 2018.
- [2] R. Munir, *Metode Numerik Revisi Keempat*, Bandung: Penerbit Informatika Bandung, 2015.
- [3] S. B. Waluya, *Persamaan Diferensial*, Yogyakarta: Graha Ilmu, 2006.
- [4] S. S. Chapra dan R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers Seventh Edition*, Mc Graw-Hill Education, 2015.

- [5] Muhtar, "Penurunan Syarat Orde Metode Runge-Kutta dengan Deret Butcher," JMSK (Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi), pp. 111-119, 2016.
- [6] J. C. Butcher, Numerical Methods for Ordinary Differential Equations Second Edition, England: John Wiley and Sons,Ltd., 2008.
- [7] E. Cahyono, Pemodelan Matematika, Yogyakarta: Graha Ilmu, 2013.
- [8] S. S.Rao, Mechanical Vibrations 5th Edition, United States of America: Pearson Prentice Hall, 2011.
- [9] E. Budi, "Kajian Fisis pada Gerak Osilasi Harmonis," JPPPF-Jurnal Penelitian & Pengembangan Pendidikan Fisika , pp. 59-66, 2015.
- [10] A. Susilo, M. Yunianto dan V. I. Variani, "Simulasi Gerak Harmonik Sederhana dan Osilasi Tereadam pada Cassy-E 524000," Indonesian Journal of Applied Physics Vol.2 No.2, pp. 124-137, 2012.
- [11] W. T. Thomson, Theory of Vibration with Applications, 2nd Edition, Prentice-Hall,Inc, 1980.
- [12] E. Harahap, F. H. Badruzzaman dan M. Y. Fajar, "Metoda Iteratif pada Permasalahan Menara Hanoi," Jurnal Matematika Universitas Islam Bandung, pp. 19-23, 2006.
- [13] C. Beards dan E. Arnold, Engineering Vibration Analysis with Application to Control Systems, London: J W Arrowsmith Ltd, Bristol, 1995.