Prosiding SI MaNIs (Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami)
Vol.1, No.1, Juli 2017, Hal. 306-311
p-ISSN: 2580-4596; e-ISSN: 2580-460X

Eksistensi Solusi Persamaan Lyapunov pada Sistem Linear Waktu Diskrit atas Ring Komutatif

Inna Kuswandari[1], Fatmawati[2], Mohammad Imam Utoyo[3]
[1,2,3]Departemen Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga,
e-mail: ikuswandari94@gmail.com, fatma47unair@gmail.com, m.i.utoyo@fst.unair.ac.id

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 15 Mei 2017
Direvisi: 1 Juni 2017
Diterbitkan: 31 Juli 2017

Kata kunci:

Persamaan Lyapunov
Sistem linear
Ring komutatif.

ABSTRAK

Misalkan diberikan sistem linear atas ring komutatif. Beberapa sifat penting dari sistem linear adalah stabil asimtotis, terkendali, dan terobservasi. Sistem dikatakan stabil asimtotis jika solusi sistem dalam rentang waktu tak terbatas akan menuju ke suatu titik tertentu, dalam hal ini titik kesetimbangan. Selain menggunakan kriteria nilai eigen, kestabilan sistem linear berkaitan erat dengan eksistensi solusi persamaan Lyapunov. Tujuan penelitian ini adalah menentukan syarat cukup eksistensi solusi persamaan Lyapunov pada sistem linear waktu diskrit atas ring komutatif terkait kestabilan, keterkendalian, dan keterobservasian sistem.

Korespondensi:

Inna Kuswandari
Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Airlangga,
Jl. Mulyorejo Surabaya 60119
Email: ikuswandari94@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Teori sistem matematika merupakan studi yang mempelajari kontrol dari input atau fenomena output [1]. Suatu sistem mungkin diperoleh dari model matematika pada fenomena tertentu. Orde suatu sistem adalah dimensi dari ruang keadaan. Jika orde sistem besar, maka perhitungan terkait karakteristik suatu sistem juga melibatkan besaran yang kompleks/rumit. Pada kasus tertentu perhitungan semacam itu tidak efisien terutama dari sisi waktu. Oleh karena itu, sistem yang berorde tinggi perlu direduksi, sehingga orde dari sistem menjadi lebih kecil. Metode yang sering digunakan untuk mereduksi orde sistem pada sistem linear diantaranya adalah metode pemotongan setimbang (*Balanced Truncation*/BT). Sesuai dengan namanya, metode pemotongan setimbang mensyaratkan sistem harus setimbang terlebih dahulu. Konstruksi sistem setimbang dapat dilakukan jika sistem telah stabil asimtotis, terkendali, dan terobservasi.

Di sisi lain, sistem linear yang banyak dikembangkan oleh para peneliti adalah sistem linear atas lapangan (lapangan bilangan real/kompleks). Sistem linear atas lapangan telah banyak dibahas diantaranya dalam [1], [2], dan [3]. Pada sistem atas lapangan, peran persamaan Lyapunov sangat penting terkait dengan kestabilan, keterkendalian, dan keterobservasian sistem. Pada penelitian ini, objek penelitian diperluas bukan lagi lapangan, tetapi ring komutatif. Sistem linear atas ring komutatif telah dibahas oleh Brewer, dkk. (1986), di dalamnya dibahas sifat-sifat sistem, yaitu kestabilan, keterkendalian, keterobservasian beserta sifat yang menyertainya. Dengan asumsi perluasan dari lapangan ke ring komutatif tidak mengubah keberlakukan sifat dan definisi secara umum, penelitian ini bertujuan menentukan eksistensi solusi persamaan Lyapunov pada sistem linear atas ring komutatif.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Sebelum membahas sistem linear atas ring, pertama kali diperkenalkan beberapa konsep pada matriks yang entrinya merupakan elemen suatu ring (disebut matriks atas ring). Semua definisi dan teorema terkait matriks atas ring merujuk pada [5], kecuali disebutkan khusus.

Definisi 1. Misalkan R sebarang ring komutatif. Himpunan semua matriks berukuran $m \times n$ yang entrinya merupakan elemen R dinotasikan dengan $M_{m\times n}(R)$. Jika $m = n$, maka $M_{m\times n}(R)$ ditulis sebagai $M_n(R)$.

Definisi 2. Misalkan R sebarang ring komutatif dengan elemen satuan dan $A \in M_n(R)$. Matriks $B \in M_n(R)$ adalah invers dari matriks A jika $AB = BA = I_n$, dengan I_n merupakan matriks identitas berukuran $n \times n$.

Teorema 3. Misalkan R sebarang ring komutatif dengan elemen satuan dan $A \in M_n(R)$, maka $A.\operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A).A = \det(A).I_n$

Berdasarkan Definisi 2 dapat dikatakan bahwa definisi invers pada matriks atas ring sama dengan definisi invers pada matriks atas lapangan. Perbedaannya adalah pada kriteria bilamana suatu matriks mempunyai invers sebagaimana definisi berikut.

Definisi 4. Misalkan R sebarang ring komutatif dengan elemen satuan 1. Elemen $a \in R$ dinamakan unit di R jika terdapat $b \in R$ sehingga $a.b = 1$. Himpunan semua unit dari ring R dinotasikan dengan $U(R)$.

Teorema 5. Misalkan R sebarang ring komutatif dengan elemen satuan dan $A \in M_n(R)$. Matriks A invertibel jika dan hanya jika $\det(A) \in U(R)$.

Definisi 6. Misalkan $A \in M_{m\times n}(R)$. Untuk setiap $t = 1, 2, \ldots, r$ dengan $r = \min\{m, n\}$, $J_t(A)$ menyatakan ideal di R yang dibangun oleh semua minor berukuran $t \times t$ dari matriks A, yaitu kombinasi linear dari determinan sub matriks A yang berukuran $t \times t$.

Definisi 7 [4]. Untuk sebarang vektor x dan y di R^n, hasilkali dalam x dan y adalah $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$, dengan $x_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan $\bar{y}_i = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$.

Definisi 8 [4]. Matriks $G \in M_n(R)$ disebut definit positif jika $\langle Gx, x\rangle > 0, \forall x \in R^n$.

Definisi 9. Misalkan M adalah R-modul. Untuk suatu $m \in M$, $\operatorname{Ann}_R(m) = \{x \in R;\ xm = 0\}$

Definisi 10. Misalkan $A \in M_{m\times n}(R)$. Rank dari matriks A dinotasikan *rank*(A) didefinisikan sebagai $rank(A) = \text{maks}(t;\ \operatorname{Ann}_R(J_t(A)) = \{0\})$.

Definisi 11. Misalkan M dan N masing-masing adalah R-modul dan $f : M \to N$ adalah homomorfisma R-modul. Himpunan semua homomorfisma R-modul dari M ke N dinotasikan dengan $\operatorname{Hom}_R(M, N)$.

Definisi 12. Misalkan $f \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$, kernel homomorfisma f dinotasikan dengan Ker(f), didefinisikan sebagai $\operatorname{Ker}(f) = \{m \in M;\ f(m) = 0\}$.

Definisi 13. Misalkan $A \in M_n(R)$, elemen $d \in R$ disebut nilai eigen dari matriks A jika $A\xi = d\xi$, untuk $\xi \neq 0, \xi \in R^n$.

Dengan mengadopsi pengertian sistem linear atas lapangan, berikut ini didefinisikan sistem linear atas ring komutatif.

Definisi 14 [4]. Misalkan R adalah sebarang ring komutatif, sistem *linear time invariant* (LTI) waktu diskrit atas ring komutatif R didefinisikan sebagai persamaan beda linear dengan koefisien konstan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) &= C\,x(k) + D\,u(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $x(k) \in R^n$ dinamakan vektor keadaan (*state*) pada waktu k, $u(k) \in R^p$ dinamakan vektor input pada waktu k, $y(k) \in R^q$ dinamakan vektor output pada waktu k, serta matriks A,B,C,D masing-masing merupakan matriks konstan atas ring komutatif R yang ukurannya bersesuaian.

Dengan metode rekursi untuk nilai k = 0,1,2, … diperoleh solusi sistem (1) tersebut untuk $x(k_0) = x_0$ adalah

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B\, u(j), \quad k \geq 1$$

dan vektor output

$$y(k) = C\left(A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B\, u(j) \right) + D\, u(k) \ .$$

Beberapa sifat penting dari sistem linear adalah stabil asimtotis, terkendali, dan terobservasi. Sistem dikatakan stabil asimtotis jika solusi sistem dalam rentang waktu tak terbatas akan menuju ke suatu titik tertentu, dalam hal ini titik kesetimbangan. Kesetimbangan pada sistem linear terjadi jika tidak ada perubahan laju solusi untuk periode waktu tertentu, secara matematik dinyatakan $\Delta x(k)$ = 0. Titik kesetimbangan (asimtotis) pada sistem (1) adalah $x(k)$ = 0. Definisi kestabilan asimtotis diberikan di bawah ini.

Definisi 15 [2]. Misalkan diberikan sistem (1) tanpa input, yaitu $x(k+1) = A\, x(k)$, dengan nilai awal $x(0) = x_0$. Sistem stabil asimtotis jika $\lim_{k\to\infty} x(k) = 0$, dengan $x(k) = A^k x_0, \quad k \geq 1$ merupakan solusi dari sistem (1).

Sistem (1) yang memenuhi kriteria pada Definisi 15 dinamakan sistem yang stabil asimtotis, dan matriks A dinamakan matriks stabil. Karakterisasi sistem yang stabil asimtotis diberikan di bawah ini.

Teorema 16 [2]. Diberikan sistem linear $x(k+1) = A\, x(k)$, dengan $x(k) \in R^n$ dan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k \quad (k \leq n)$ merupakan nilai eigen dari matriks A. Sistem (1) **stabil asimtotis** jika dan hanya jika $|\lambda_i| < 1$ untuk i = 1,2, ..., k, dengan $|\lambda_i|$ menyatakan modulus dari λ_i.

Selain menggunakan kriteria nilai eigen matriks A, kestabilan sistem linear berkaitan erat dengan eksistensi solusi persamaan Lyapunov (menggunakan metode Lyapunov kedua). Metode ini memungkinkan menentukan kestabilan sistem tanpa mengetahui solusi dari sistem tersebut. Persamaan Lyapunov untuk sistem linear atas lapangan telah diberikan oleh [2]. Di bawah ini diberikan definisi persamaan Lyapunov untuk sistem linear atas ring yang mengadop definisi persamaan Lyapunov untuk sistem linear atas lapangan.

Definisi 17 [6]. Diberikan matriks $A, M \in R^n$. **Persamaan Lyapunov** untuk sistem linear atas ring komutatif didefinisikan sebagai $AXA^t - X + M = 0$, dengan $X \in R^n$.

Pada sistem linear atas lapangan, sistem akan stabil asimtotis jika eksistensi solusi persamaan Lyapunov ada, sebaliknya eksistensi solusi persamaan Lyapunov ada jika sistem stabil asimtotis [2], sebagaimana teorema berikut.

Teorema 18 [6]. Sistem linear atas lapangan stabil asimtotis jika dan hanya jika untuk sebarang matriks definit positif Q, terdapat matriks definit positif P, sehingga $APA^t - P + Q = 0$.

Bukti :

Misalkan diambil sebarang matriks definit positif Q, dipilih $P = \sum_{k=0}^{\infty} A^k Q (A^t)^k$, jadi P merupakan matriks definit positif. Ditunjukkan bahwa P memenuhi persamaan Lyapunov di atas.

$$\begin{aligned}
APA^t - P &= A \sum_{k=0}^{\infty} A^k Q (A^t)^k A^t - \sum_{k=0}^{\infty} A^k Q (A^t)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} Q (A^t)^{k+1} - (Q + \sum_{k=1}^{\infty} A^k Q (A^t)^k \\
&= -Q + (\sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} Q (A^t)^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} Q (A^t)^{k+1})
\end{aligned}$$

Karena sistem stabil asimtotis, maka pengurangan jumlahan takhingga di atas konvergen ke nol. Akibatnya, diperoleh $APA^t - P = -Q$, artinya P adalah solusi dari persamaan Lyapunov.

Sifat sistem selain kestabilan adalah keterkendalian dan keterobservasian, definisi dan karakterisasinya diberikan di bawah ini.

Definisi 19 [4]. Sistem (1) dikatakan **terkendali** jika untuk setiap *state* $x_0, x_1 \in R^n$ dan $k > 0$, terdapat input u sehingga berlaku $x(k, x_0, u) = x_1$.

Teorema 20 [4]. Misalkan diberikan sistem linear (1). Pernyataan berikut ini ekuivalen
(i). Sistem (1) terkendali.
(ii). Kolom-kolom matriks $[B \mid AB \mid A^2B \mid ...]$ membangun R^n, artinya setiap elemen dari R^n merupakan kombinasi linear dari matriks $[B \mid AB \mid A^2B \mid ...]$.
(iii). Kolom-kolom matriks $\Re = [B \mid AB \mid A^2B \mid ... \mid A^{n-1}B]$ membangun R^n.
(iv). Ideal $J_n(\Re) = R$.

Definisi 21 [4]. Sistem (1) dikatakan **terobservasi** jika untuk setiap input u, terdapat $k > 0$ sehingga $y(j, x_0, u) = y(j, x_1, u)$, $j = 0,1,2,\ldots,k$ mengakibatkan $x_0 = x_1$.

Teorema 22 [4]. Misalkan diberikan sistem linear (1). Pernyataan berikut ini ekuivalen
(i). Sistem (1) terobservasi.
(ii). Pemetaan $\varphi_n : R^n \to \prod_{i=0}^{n-1} R^p$ dengan $\varphi_n(x) = [Cx \mid CAx \mid ... \mid CA^{n-1}x]$ injektif.
(iii). Jika $W = [C^t \mid A^tC^t \mid (A^t)^2C^t \mid ... \mid \mid (A^t)^{n-1}C^t]$, maka $\mathrm{Ann}_R(J_n(W)) = \{0\}$.

Definisi 23 [6]. Misalkan diberikan sistem (1) atas ring komutatif R. Persamaan Lyapunov keterkendalian dan keterobservasian didefinisikan sebagai berikut:
a. Persamaan Lyapunov keterkendalian adalah $APA^T - P + BB^T = 0$.
b. Persamaan Lyapunov keterobservasian adalah $AQA^T - Q + C^TC = 0$.

Solusi dari persamaan Lyapunov di atas berturut-turut adalah $P = \sum_{k=0}^{\infty} A^k BB^t (A^t)^k$ dan $Q = \sum_{k=0}^{\infty} A^k C^t C (A^t)^k$ yang disebut grammian keterkendalian dan grammian keterobservasian.

Sementara itu, sistem linear yang banyak dikaji oleh para peneliti adalah sistem atas lapangan. Definisi sifat sistem (kestabilan, keterkendalian, dan keterobservasian) antara sistem atas lapangan dengan sistem atas ring adalah sama, dengan demikian keserupaan karakterisasi terkait sifat sistem tersebut sangat mungkin terjadi.

Penelitian ini akan mengkaji eksistensi solusi persamaan Lyapunov pada sistem linear atas ring komutatif terkait dengan kestabilan, keterkendalian, dan keterobservasian. Keserupaan/kesamaan syarat perlu dan cukup mungkin saja terjadi sebagaimana sistem linear atas lapangan. Sifat-sifat sistem atas ring komutatif telah dibahas dalam [4], [7] membahas sistem atas ring, khusus untuk ring yang mempunyai banyak elemen berhingga, sedangkan [8] membahas sistem atas ring Noetheri dengan parameter waktu berubah-ubah.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Telah ditunjukkan bahwa matriks P merupakan solusi persamaan Lyapunov (bukti Teorema 18), dan eksistensi solusi tersebut menjamin kestabilan (asimtotis) suatu sistem linear atas lapangan. Pada bagian ini akan dikaji keterkaitan solusi persamaan Lyapunov dengan sifat kestabilan, keterkendalian, dan keterobservasian suatu sistem linear atas ring komutatif. Pembahasan sifat sistem atas ring memanfaatkan fakta bahwa sebarang matriks dapat dipandang sebagai suatu pemetaan linear.

Teorema 24. Misalkan R adalah sebarang ring komutatif dan $A \in M_n(R)$ adalah matriks stabil. Jika didefinisikan pemetaan linear $T : M_n(R) \to M_n(R)$ dengan $T(P) = APA^t - P$, $\forall P \in M_n(R)$, maka kondisi berikut berlaku
1) T invertibel, artinya T merupakan matriks yang mempunyai invers.
2) jika $Q > 0$, maka terdapat dengan tunggal matriks P, sehingga $T(P) = -Q$ yang memenuhi $P > 0$.

Bukti :

1). Karena $M_n(R)$ berdimensi hingga, untuk menunjukkan *T* invertibel cukup ditunjukkan bahwa pemetaan *T* satu-satu. Misalkan *T*(*X*) = 0, ditunjukkan *X* = 0.

Karena *A* matriks stabil, maka $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$, yaitu $|\lambda_i(A)| < 1$, $\forall i$. Misalkan λ adalah nilai eigen dari matriks *A*, dan dari *T*(*X*) = 0,

$$AXA^t - X = 0$$

$$(\lambda X)A^t - X = 0$$

Karena nilai eigen matris *A* dengan nilai eigen matriks A^t adalah sama, maka

$$\lambda(\lambda X) - X = 0$$

$$\lambda^2 X - X = 0$$

$$(\lambda^2 I - I)X = 0$$

Karena $\lambda^2 I - I \neq 0$, maka $X = 0$.

Jadi *T* invertibel.

2). Berdasarkan bukti Teorema 18, jelas bahwa *P* matriks definit positif. Ketunggalan matriks *P* dijamin oleh pemetaan *T* yang satu-satu (injektif).

Berdasarkan Teorema 24, sistem yang stabil asimtotis menjamin eksistensi solusi persamaan Lyapunov dan solusinya merupakan matriks definit positif. Berikut ini diberikan keterkaitan solusi persamaan Lyapunov dengan sifat keterkendalian dan keterobservasian sistem linear atas ring.

Teorema 25. Misalkan *R* adalah ring komutatif dan $A \in M_n(R)$ adalah matriks stabil. Didefinisikan pemetaan linear $T : M_n(R) \to M_n(R)$ dengan $T(X) = AXA^t - X$, $\forall X \in M_n(R)$. Jika sistem (1) terkendali dan *B* > 0, maka terdapat dengan tunggal matriks *P*, sehingga *T*(*P*) = $-\ BB^t$ yang memenuhi *P* > 0.

Bukti:

Jika sistem (1) terkendali, maka berdasarkan Teorema 20, kolom-kolom matriks $[B\,|\,AB\,|\,A^2B\,|\ldots\,|\,A^{n-1}B]$ membangun R^n. Ini berarti *T* merupakan pemetaan surjektif. Karena *A* matriks stabil, maka *T* pemetaan satu-satu atau *T* matriks invertibel. Dipilih $P = \sum_{k=0}^{\infty} A^k BB^t (A^t)^k$, maka dipenuhi $T(P) = BB^t$. Berdasarkan definisi matriks *P*, jelas bahwa *P* matriks definit positif.

Teorema 26. Misalkan *R* adalah ring komutatif dan $A \in M_n(R)$ adalah matriks stabil. Didefinisikan pemetaan linear $T : M_n(R) \to M_n(R)$ dengan $T(X) = AXA^t - X$, $\forall X \in M_n(R)$. Jika sistem (1) terobservasi dan *C* > 0, maka terdapat dengan tunggal matriks *Q*, sehingga *T*(*Q*) = $-C^tC$ yang memenuhi *Q* > 0.

Bukti:

Sejalan dengan bukti Teorema 25.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa

1. Syarat cukup eksistensi solusi persamaan Lyapunov pada sistem linear atas ring komutatif adalah stabil asimtotis.
2. Solusi dari persamaan Lyapunov keterkendalian adalah grammian ketekendalian yang merupakan matriks definit positif.
3. Solusi dari persamaan Lyapunov keterobservasian adalah grammian keterobservasian yang merupakan matriks definit positif.

Untuk keperluan pengembangan lebih lanjut, topik penelitian lanjutan yang dapat dikembangkan adalah konstruksi sistem setimbang pada sistem linear atas ring komutatif jika sistem sudah stabil asimtotis, terkendali, dan terobservasi. Hal ini dilakukan sebelum melakukan reduksi orde model dengan metode pemotongan setimbang, agar diperoleh model dengan orde yang lebih rendah. Model dengan orde rendah tentu saja lebih efisien dan efektif, baik dari sisi waktu perhitungan maupun biaya yang diperlukan.

REFERENSI

[1] Olsder, G. J. dan van der Woude, J. W., *Mathematical Systems Theory*, Delftse Uitgevers Maatschappij b.v, Netherlands, 2003.
[2] Zhou, K., Doyle, J. C., Glover, K., *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
[3] Zhou, K. dan Doyle, J. C., *Essentials of Robust Control*, Prentice-Hall, New Jersey, 1998.
[4] Brewer, J.W., Brunce, J.W., dan Van Vleck, F.S., *Linear Systems Over Commutative Rings*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1986.
[5] Brown, W.C., *Matrices over Commutative Rings*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1993.
[6] Ogata, K., *Discrete-Time Control Systems*, Prentice-Hall International, Inc., New Jersey, 1995.
[7] Xu, G. dan Zou, Y.M., Linear Dynamical Systems over Finite Rings, *Journal of Algebra*, vol. 321, Issue 8, pp. 2149-2155, 2009.
[8] Zampieri, S. dan Mitter, S.K., Linear system over noetherian rings in the behavioural approach, *Journal of Mathematical System, Estimation, and Control*, 6(2), pp. 1-26, 1996.