

Semiring *Clear* dan Sifat-Sifatnya

Yassin Dwi Cahyo¹, Nikken Prima Puspita²

^{1,2}Departemen Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang
yassindwicahyo@gmail.com, nikkenprima@lecturer.undip.ac.id

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima : 17 November 2024
Direvisi : 10 Januari 2025
Diterbitkan: 12 Februari 2025

Kata Kunci:

Semiring
Semiring *Clear*
Unit
Unit Reguler

ABSTRAK

Semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ dikatakan *clear* jika untuk setiap elemen tak nol $s \in \mathcal{S}$, s dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu elemen unit dan suatu elemen unit reguler. Jika diberikan keluarga semiring *clear* $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, maka hasil kali kartesian dari keluarga semiring *clear* $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, juga merupakan semiring *clear* terhadap operasi penjumlahan dan perkalian *pointwise*. Sifat yang lain adalah setiap homomorfisma semiring g dari $\mathcal{S}_1$ ke $\mathcal{S}_2$ di mana $\mathcal{S}_1$ semiring *clear*, maka *image* dari g juga merupakan semiring *clear*. Pada artikel ini juga diberikan syarat perlu dan syarat cukup suatu elemen pada semiring dikatakan *clear*.

Copyright © 20XX SIMANIS.
All rights reserved.

Korespondensi:

Yassin Dwi Cahyo,
Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro,
Jl. Prof. Jacub Rais, Tembalang, Semarang.
yassindwicahyo@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Himpunan tak kosong $\mathcal{R}$ yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan “+” dan operasi biner perkalian “ $\cdot$ ”, yang dinotasikan dengan $(\mathcal{R}, +, \cdot)$, disebut ring jika $(\mathcal{R}, +)$ adalah grup komutatif, $(\mathcal{R}, \cdot)$ adalah semigrup, serta operasi “+” dan “ $\cdot$ ” memenuhi hukum distributif kiri dan kanan pada $\mathcal{R}$ [1]. Pada tahun 1934, H.S. Vandiver menemukan struktur aljabar semiring [2]. Semiring merupakan bentuk generalisasi dari ring. Himpunan tak kosong $\mathcal{S}$ yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan “+” dan operasi biner perkalian “ $\cdot$ ”, yang dinotasikan dengan $(\mathcal{S}, +, \cdot)$, disebut semiring jika $(\mathcal{S}, +)$ adalah monoid komutatif, struktur $(\mathcal{S}, \cdot)$ adalah monoid, operasi “+” dan “ $\cdot$ ” memenuhi hukum distributif kiri dan kanan pada $\mathcal{S}$, serta berlaku hukum penyerapan, yaitu $0 \cdot s = s \cdot 0 = 0$ untuk setiap $s \in \mathcal{S}$ [3].

Pada tahun 1977, Nicholson [4] memperkenalkan salah satu jenis ring khusus, yaitu ring bersih. Ring $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ disebut ring bersih jika setiap elemen di $\mathcal{R}$ dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di $\mathcal{R}$. Kemudian, pada tahun 2021, Zabavsky [5] mendefinisikan jenis ring khusus lainnya, yaitu ring *clear*. Ring $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ disebut ring *clear* jika setiap elemen di $\mathcal{R}$ dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu elemen unit reguler dan suatu elemen unit di $\mathcal{R}$. Selanjutnya, pada tahun 2023, Kar dan Das [6] memperumum ring bersih menjadi semiring bersih. Semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ disebut semiring bersih jika setiap elemen tak nol di $\mathcal{S}$ dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di $\mathcal{S}$.

Pada artikel ini, dipaparkan mengenai perumuman ring *clear*, yaitu semiring *clear* dan beberapa sifat-sifatnya.

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka mengenai ring *clear* dan semiring bersih dari berbagai buku dan artikel ilmiah.

Berikut beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan topik yang dibahas pada artikel ini. Namun, sebelum didefinisikan mengenai ring *clear*, terlebih dahulu diberikan definisi elemen unit dan elemet unit reguler pada suatu ring.

Definisi 1 [1] Diberikan ring $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ dengan elemen satuan $1_{\mathcal{R}}$. Elemen $u \in \mathcal{R}$ disebut elemen unit jika terdapat $s \in \mathcal{R}$ sedemikian sehingga $us = su = 1_{\mathcal{R}}$.

Selanjutnya, himpunan semua elemen unit pada $\mathcal{R}$ dinotasikan dengan $U(\mathcal{R})$.

Definisi 2 [7] Diberikan ring $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ dengan elemen satuan $1_{\mathcal{R}}$. Elemen $v \in \mathcal{R}$ disebut elemen unit reguler jika terdapat $u \in U(\mathcal{R})$ sedemikian sehingga $v = vuv$.

Selanjutnya, himpunan semua elemen unit reguler pada $\mathcal{R}$ dinotasikan dengan $U_{reg}(\mathcal{R})$.

Terdapat jenis ring khusus yang setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu elemen unit dan suatu elemen unit reguler, yaitu ring *clear*.

Definisi 3 [5] Diberikan ring $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ dengan elemen satuan $1_{\mathcal{R}}$. Ring $\mathcal{R}$ dikatakan *clear* jika untuk setiap elemen $r \in \mathcal{R}$ dapat dinyatakan sebagai $r = u + v$, di mana $u \in U(\mathcal{R})$ dan $v \in U_{reg}(\mathcal{R})$.

Proposisi 1 [5] Setiap *image* homomorfisma dari ring *clear* adalah *clear*.

Proposisi 2 [5] Hasil kali kartesian dari ring *clear* adalah *clear*.

Lemma 1 [5] Elemen $r \in \mathcal{R}$ *clear* jika dan hanya jika terdapat elemen unit u sedemikian sehingga ur dan ru adalah elemen bersih.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, dijelaskan hasil-hasil penelitian dan diskusi yang menyeluruh terkait bidang semiring *clear*.

3.1. Semiring *Clear*

Sebelum didefinisikan mengenai semiring *clear*, terlebih dahulu diberikan definisi elemen-elemen khusus pada suatu semiring, di antaranya elemen idempoten, elemen unit, dan elemet unit reguler pada suatu ring.

Definisi 4. [6] Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$. Elemen $i \in \mathcal{S}$ disebut elemen idempoten jika $i = i^2$.

Selanjutnya, himpunan semua elemen idempoten pada $\mathcal{S}$ dinotasikan dengan $Id(\mathcal{S})$.

Contoh 1

1. Diberikan semiring $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$. Elemen-elemen idempoten pada $\mathbb{Z}_0^+$, yaitu 0 dan 1, sebab $0 = 0^2$ dan $1 = 1^2$.
2. Elemen-elemen idempoten pada semiring $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$, yaitu $\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{4}$, sebab $\overline{0}^2 = \overline{0}, \overline{1}^2 = \overline{1}, \overline{3}^2 = \overline{9} = \overline{3}$, dan $\overline{4}^2 = \overline{16} = \overline{4}$.

Definisi 5. [3] Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$. Elemen $u \in \mathcal{S}$ disebut elemen unit jika terdapat $s \in \mathcal{R}$ sedemikian sehingga $us = su = 1_{\mathcal{S}}$.

Selanjutnya, himpunan semua elemen unit pada $\mathcal{S}$ dinotasikan dengan $U(\mathcal{S})$.

Contoh 2

1. Diberikan semiring $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$. Elemen unit pada $\mathbb{Z}_0^+$ hanyalah 1, sebab $1 \cdot 1 = 1$.
2. Diberikan semiring $(\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \otimes)$. Elemen unit pada $\mathbb{R}_{\max}$ adalah semua elemen $r \in \mathbb{R}_{\max} \setminus \{-\infty\}$, sebab untuk setiap $r \in \mathbb{R}_{\max} \setminus \{-\infty\}$ dapat ditemukan $-r \in \mathbb{R}_{\max} \setminus \{-\infty\}$ sedemikian sehingga $r \otimes (-r) = 0 = -r \otimes r$.
3. Setiap elemen tak nol pada semi-field $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ adalah unit.

Definisi 6. [8] Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$. Elemen $v \in \mathcal{S}$ disebut elemen unit reguler jika terdapat $u \in U(\mathcal{S})$ sedemikian sehingga $v = vuv$.

Selanjutnya, himpunan semua elemen unit reguler pada $\mathcal{S}$ dinotasikan dengan $U_{reg}(\mathcal{S})$.

Contoh 3

1. Setiap semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ dengan elemen satuan $1_{\mathcal{S}}$ selalu mempunyai elemen unit reguler trivial, yaitu $U_{reg}(\mathcal{S}) = \{0_{\mathcal{S}}, 1_{\mathcal{S}}\}$, sebab $0_{\mathcal{S}} = 0_{\mathcal{S}} \cdot u \cdot 0_{\mathcal{S}}$ dan $1_{\mathcal{S}} = 1_{\mathcal{S}} \cdot 1_{\mathcal{S}} \cdot 1_{\mathcal{S}}$ untuk suatu $u, 1_{\mathcal{S}} \in U(\mathcal{S})$.
2. Setiap elemen idempoten pada $\mathcal{S}$ merupakan elemen unit reguler pada $\mathcal{S}$, sebab untuk setiap $i \in Id(\mathcal{S})$, i dapat dinyatakan sebagai $i \cdot 1_{\mathcal{S}} \cdot i = i^2 = i$ untuk suatu $1_{\mathcal{S}} \in U(\mathcal{S})$.
3. Setiap elemen unit pada $\mathcal{S}$ merupakan elemen unit reguler pada $\mathcal{S}$, sebab untuk setiap $p \in U(\mathcal{S})$ dapat ditemukan $q \in U(\mathcal{S})$ sedemikian sehingga $p \cdot q = 1_{\mathcal{S}}$ dan $p \cdot q \cdot p = 1_{\mathcal{S}} \cdot p = p$.

Terdapat jenis semiring khusus yang setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu elemen unit dan suatu elemen unit reguler, yaitu semiring *clear*.

Definisi 7. Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$. Semiring $\mathcal{S}$ dikatakan *clear* jika untuk setiap elemen tak nol $r \in \mathcal{S}$ dapat dinyatakan sebagai $r = u + v$, di mana $u \in U(\mathcal{S})$ dan $v \in U_{reg}(\mathcal{S})$.

Contoh 4. Semiring $(\mathbb{Q}_0^+, +, \cdot)$ adalah semiring *clear* sebab untuk setiap elemen tak nol $q \in \mathbb{Q}_0^+$ dapat dinyatakan sebagai $q = 0 + q$ dengan $0 \in U_{reg}(\mathbb{Q}_0^+)$ dan $q \in U(\mathbb{Q}_0^+)$.

Remark 1.

1. Semiring *clear* merupakan perumuman dari ring *clear*.
2. Setiap semi-field merupakan semiring *clear*.
3. Subsemiring dari semiring *clear*, belum tentu *clear*.

3.2. Sifat-Sifat pada Semiring Clear

Lemma 2. Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$. Elemen $s \in U_{reg}(\mathcal{S})$ jika dan hanya jika s dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di $\mathcal{S}$.

Bukti:

Diketahui semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$.

$\Rightarrow$ Diketahui $s \in U_{reg}(\mathcal{S})$. Ditunjukkan bahwa s dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di $\mathcal{S}$.

Diambil sebarang $s \in U_{reg}(\mathcal{S})$, artinya $s = sas$ dengan $a \in U(\mathcal{S})$. Pandang $e = sa$, diperoleh

$$e^2 = (sa)(sa) = (sas)a = sa = e.$$

Akibatnya, $e = sa \in Id(\mathcal{S})$. Selanjutnya, pandang $u = a^{-1} \in U(\mathcal{S})$, diperoleh

$$s = s(aa^{-1}) = (sa)a^{-1} = eu.$$

Terbukti bahwa setiap elemen unit reguler di $\mathcal{S}$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di $\mathcal{S}$.

$\Leftarrow$ Diketahui $s \in \mathcal{S}$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di $\mathcal{S}$. Ditunjukkan bahwa $s \in U_{reg}(\mathcal{S})$.

Diambil sebarang $s = eu \in \mathcal{S}$ dengan $e \in Id(\mathcal{S})$ dan $u \in U(\mathcal{S})$. Ditunjukkan ada $v \in U(\mathcal{S})$ sedemikian sehingga $s = svs$. Pandang $v = u^{-1}$. Diperhatikan bahwa:

$$svs = su^{-1}s = (eu)u^{-1}(eu) = eu = s.$$

Terbukti bahwa $s \in U_{reg}(\mathcal{S})$.

Jadi, terbukti bahwa elemen $s \in U_{reg}(\mathcal{S})$ jika dan hanya jika s dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di $\mathcal{S}$. ■

Proposisi 3 Diberikan semiring $(\mathcal{S}_1, +_1, \cdot_1)$ dan $(\mathcal{S}_2, +_2, \cdot_2)$, serta homomorfisma semiring $\delta: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$. Jika $(\mathcal{S}_1, +_1, \cdot_1)$ merupakan semiring *clear*, maka *image* dari δ juga merupakan semiring *clear*.

Bukti:

Diberikan semiring *clear* $(\mathcal{S}_1, +_1, \cdot_1)$ dan semiring $(\mathcal{S}_2, +_2, \cdot_2)$, serta homomorfisma semiring $\delta: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$. Akan dibuktikan bahwa $\text{Im}(\delta)$ adalah semiring *clear*. Diambil sebarang $s \in \text{Im}(\delta) \setminus \{0_{\mathcal{S}_2}\}$, artinya s dapat dinyatakan sebagai $s = \delta(a)$, untuk suatu $a \in \mathcal{S}_1 \setminus \{0_{\mathcal{S}_1}\}$. Oleh karena $\mathcal{S}_1$ adalah semiring *clear*, ini berarti $a = u + v$, di mana $u \in U(\mathcal{S}_1)$ dan $v \in U_{\text{reg}}(\mathcal{S}_1)$. Dimisalkan $v = e \cdot p$ di mana $e \in \text{Id}(\mathcal{S}_1)$ dan $p \in U(\mathcal{S}_1)$. Diperhatikan bahwa

$$\delta(a) = \delta(u + v) = \delta(u + e \cdot p) = \delta(u) + \delta(e) \cdot \delta(p).$$

Oleh karena $u, p \in U(\mathcal{S}_1)$, maka $\delta(u), \delta(p) \in U(\text{Im}(\delta))$ dan $e \in \text{Id}(\mathcal{S}_1)$, maka $\delta(e) \in \text{Id}(\text{Im}(\delta))$. Selanjutnya, berdasarkan lemma 2, diperoleh $\delta(e) \cdot \delta(p) \in U_{\text{reg}}(\text{Im}(\delta))$. Dengan kata lain, $\delta(a)$ dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu elemen unit dan suatu elemen unit reguler di $\mathcal{S}_2$. Jadi, terbukti bahwa *image* homomorfisma dari suatu semiring *clear* juga merupakan semiring *clear*. ■

Proposisi 4 Diberikan keluarga semiring $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Hasil kali kartesian dari keluarga semiring *clear* $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ merupakan semiring *clear* terhadap operasi penjumlahan dan perkalian *pointwise* jika dan hanya jika setiap $\mathcal{S}_i$ merupakan semiring *clear*.

Bukti:

Diberikan keluarga semiring $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

$\Rightarrow$ Diberikan semiring *clear* $\mathcal{S} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_i$. Akan dibuktikan setiap $\mathcal{S}_i$ merupakan semiring *clear*. Dibentuk suatu fungsi

$$\begin{aligned} \delta_i: \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_i &\rightarrow \mathcal{S}_i \\ (s_1, s_2, \dots) &\mapsto s_i, \text{ untuk setiap } (s_1, s_2, \dots) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_i. \end{aligned}$$

Jelas bahwa δ_i adalah epimorfisma. Berdasarkan proposisi 3, terbukti bahwa setiap $\mathcal{S}_i$ merupakan semiring *clear*.

$\Leftarrow$ Diberikan semiring *clear* $\mathcal{S}_i, i \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $\mathcal{S} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_i$ merupakan semiring *clear*. Diambil sebarang elemen $(s_1, s_2, \dots) \in \mathcal{S}$ di mana $s_i \neq 0_{\mathcal{S}_i}$ untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Oleh karena semiring *clear* $\mathcal{S}_i, i \in \mathbb{N}$, artinya untuk setiap elemen tak nol $s_i \in \mathcal{S}_i$ dapat dinyatakan sebagai $s_i = u_i + v_i$, di mana $u_i \in U(\mathcal{S}_i)$ dan $v_i \in U_{\text{reg}}(\mathcal{S}_i)$. Akibatnya,

$$(s_1, s_2, \dots) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots) = (u_1, u_2, \dots) + (v_1, v_2, \dots).$$

Jadi, terbukti bahwa $\mathcal{S} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_i$ merupakan semiring *clear*. ■

Proposisi 5 Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$. Elemen $s \in \mathcal{S}$ *clear* jika dan hanya jika terdapat elemen unit u sedemikian sehingga us dan su adalah elemen bersih.

Bukti.

Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$.

$\Rightarrow$ Diketahui elemen *clear* $s \in \mathcal{S}$. Ditunjukkan bahwa terdapat $u \in U(\mathcal{S})$ sehingga us dan su adalah elemen bersih.

Oleh karena elemen *clear* $s \in \mathcal{S}$, artinya

$$s = a + b \dots (*)$$

di mana $a \in U_{\text{reg}}(\mathcal{S})$ dan $b \in U(\mathcal{S})$. Dari $a \in U_{\text{reg}}(\mathcal{S})$, artinya ada $u \in U(\mathcal{S})$ sehingga $a = aua$. Selanjutnya, dengan mengalikan u pada persamaan $(*)$ didapatkan

$$us = u(a + b) = ua + ub,$$

serta $(ua)^2 = (ua)(ua) = u(aua) = ua$ dan $ub \in U(\mathcal{S})$. Diperoleh us adalah elemen bersih. Kemudian, dengan cara yang sama, didapatkan su juga elemen bersih.

$\Leftarrow$ Diketahui terdapat $u \in U(\mathcal{S})$ sehingga us dan su adalah elemen bersih. Ditunjukkan bahwa $s \in \mathcal{S}$ adalah elemen *clear*.

Dari yang diketahui, terdapat $u \in U(\mathcal{S})$ sehingga us dan su adalah elemen bersih. Pandang

$$us = e + v \dots (**)$$

di mana $e \in Id(\mathcal{S})$ dan $v \in U(\mathcal{S})$. Dengan mengalikan u^{-1} pada persamaan (**) diperoleh

$$s = u^{-1}e + u^{-1}v.$$

Oleh karena $(u^{-1}e)u(u^{-1}e) = u^{-1}e$, artinya $u^{-1}e \in U_{reg}(\mathcal{S})$. Lebih lanjut, $u^{-1}e \in U_{reg}(\mathcal{S})$ dan $u^{-1}v \in U(\mathcal{S})$. Akibatnya $s \in \mathcal{S}$ adalah elemen *clear*. Bukti analog untuk su .

Jadi, terbukti bahwa elemen $s \in \mathcal{S}$ *clear* jika dan hanya jika terdapat elemen unit u sedemikian sehingga us dan su adalah elemen bersih. ■

4. KESIMPULAN

Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$. Semiring $\mathcal{S}$ dikatakan *clear* jika untuk setiap elemen tak nol $r \in \mathcal{S}$ dapat dinyatakan sebagai $r = u + v$, di mana $u \in U(\mathcal{S})$ dan $v \in U_{reg}(\mathcal{S})$. Beberapa sifat-sifat dari semiring *clear* di antaranya adalah

1. Elemen $s \in U_{reg}(\mathcal{S})$ jika dan hanya jika s dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di $\mathcal{S}$.
2. Diberikan semiring $(\mathcal{S}_1, +_1, \cdot_1)$ dan $(\mathcal{S}_2, +_2, \cdot_2)$, serta homomorfisma semiring $\delta: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$. Jika $(\mathcal{S}_1, +_1, \cdot_1)$ merupakan semiring *clear*, maka *image* dari δ juga merupakan semiring *clear*.
3. Diberikan keluarga semiring $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Hasil kali kartesian dari keluarga semiring *clear* $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ merupakan semiring *clear* terhadap operasi penjumlahan dan perkalian *pointwise* jika dan hanya jika setiap $\mathcal{S}_i$ merupakan semiring *clear*.
4. Elemen $s \in \mathcal{S}$ *clear* jika dan hanya jika terdapat elemen unit u sedemikian sehingga us dan su adalah elemen bersih.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Pada bagian ini, Penulis menyampaikan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan artikel ini. Terima kasih kepada Dr. Nikken Prima Puspita, M.Sc. selaku dosen pembimbing dan teman-teman, terkhusus anggota di Tim Aljabar dan Kombinatorik Undip, yang telah memberikan bimbingan, saran, dan dukungan yang sangat berharga. Tak lupa juga, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada keluarga yang selalu memberikan do'a, semangat, dan motivasi. Tanpa bantuan dan dukungan dari semua pihak, penyusunan artikel ini tidak akan dapat terlaksana dengan baik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] S. Wahyuni, I. E. Wijayanti, D. A. Yuwaningsih, and A. D. Hartanto, *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta, Indonesia: Gadjah Mada Univ. Press, 2016.
- [2] H. S. Vandiver, "Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold," *Vorlesungen Über Zahlen Und Funktionenlehre*, vol. 1, no. 1, pp. 4–30, 1934.
- [3] J. S. Golan, *Semirings and Their Applications*. Dordrecht, Netherlands: Springer, 1999. Available: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9333-5>
- [4] W. K. Nicholson, "Lifting idempotents and exchange rings," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 229, pp. 269–278, 1977. Available: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1977-0439876-2>
- [5] B. V. Zabavsky, O. V. Domsha, and O. M. Romaniv, "Clear rings and clear elements," *Mat. Stud.*, vol. 55, pp. 3–9, 2021.
- [6] S. Kar and D. Das, "Clean semiring", *Beitr. Algebra Geom.*, vol. 64, pp. 197–207, 2023. Available: <https://doi.org/10.1007/s13366-022-00628-0>
- [7] G. Ehrlich, "Unit regular rings," *Portugal. Math.*, vol. 27, pp. 209–212, 1968.
- [8] P. Ara, "Strongly π -regular rings have stable range one," *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 124, no. 11, 1996.