Prosiding Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami
Vol. 5, No. 1, Februari 2025, pp. 13 – 17
p-ISSN: 2580-4596; e-ISSN: 2580-460X

Hubungan Antara Sifat Bersih dan Sifat *Clear* pada Semiring

Galang Riki Ramadhan[1], Nikken Prima Puspita[2]
[1,2]Jurusan Matematika, Universitas Diponegoro
galangrikiramadhan@students.undip.ac.id, nikkenprima@lecturer.undip.ac.id

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 13 November 2024
Direvisi: 10 Januari 2025
Diterbitkan: 10 Februari 2025

Kata Kunci:

Semiring
Bersih
Clear
Semiring Bersih
Semiring *Clear*

ABSTRAK

Diberikan semiring $(S,+,\cdot)$ dengan elemen satuan 1_S. Semiring S dikatakan bersih, jika untuk setiap elemen tak nol di S dapat dinyatakan sebagai jumlahan suatu elemen unit dan suatu elemen idempoten di S. Semiring S dikatakan *clear*, jika untuk setiap elemen tak nol di dalam S dapat dinyatakan sebagai jumlahan suatu elemen unit dan suatu elemen unit reguler S. Pada penelitian ini, dijelaskan hubungan semiring bersih dan semiring *clear.* Setiap semiring bersih merupakan semiring *clear*, tetapi tidak berlaku sebaliknya.

Korespondensi:

Galang Riki Ramadhan,
Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro,
Jl. Prof. Jacub Rais, Tembalang, Semarang
galangrikiramadhan@students.undip.ac.id

1. PENDAHULUAN

Misalkan R adalah suatu himpunan tak kosong dan pada R didefinisikan dua buah operasi biner "$+$" dan "$\cdot$", yang selanjutnya disebut operasi penjumlahan dan perkalian. Himpunan R disebut ring terhadap operasi penjumlahan "$+$" dan perkalian "$\cdot$", jika $(R,+)$ merupakan grup komutatif, operasi perkalian di R bersifat asosiatif (yang berarti $(R,\cdot)$ merupakan semigrup), serta operasi penjumlahan dan perkalian di R memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan [1]. Selanjutnya, himpunan tak kosong R disebut semiring terhadap operasi penjumlahan "$+$" dan perkalian "$\cdot$", jika $(R,+)$ merupakan monoid komutatif, $(R,\cdot)$ merupakan semigrup, serta operasi penjumlahan dan perkalian di R memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan [2]. Semiring S dikatakan semiring dengan elemen satuan 1_S jika terdapat 1_S pada S sedemikian sehingga untuk setiap elemen a pada S berlaku $1_S \cdot a = a \cdot 1_S = a$ [2].

Pada teori ring, terdapat istilah elemen idempoten, elemen unit, dan elemen unit reguler. Elemen idempoten adalah suatu elemen pada ring yang apabila dikalikan terhadap dirinya sendiri akan memberikan hasil yang tetap atau identik dengan elemen aslinya [3]. Dengan kata lain, suatu elemen a pada ring $(R,+,\cdot)$ dikatakan idempoten, jika berlaku $a^2 = a$. Elemen unit adalah suatu elemen pada ring yang mempunyai invers terhadap operasi perkalian [4]. Dengan kata lain, suatu elemen a pada ring $(R,+,\cdot)$ dikatakan unit, jika terdapat a^{-1} di $(R,+,\cdot)$ sedemikian sehingga $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_R$, dimana 1_R merupakan elemen satuan pada ring R. Selanjutnya, suatu elemen a pada ring $(R,+,\cdot)$ dikatakan sebagai unit reguler, jika $a = a \cdot u \cdot a$, untuk suatu elemen unit u [5].

Pada tahun 1977, Nicholson telah memperkenalkan konsep mengenai ring bersih, yaitu suatu ring yang setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antara elemen idempoten dengan elemen unit ring tersebut. Penelitian ini kemudian dilanjutkan oleh Chen pada tahun 2008, yang membahas mengenai sifat-sifat ring bersih, dan kemudian diperumum oleh Kar pada tahun 2023, yang membahas mengenai semiring bersih. Selanjutnya, pada tahun 2021, Zabavsky telah memperkenalkan konsep mengenai ring *clear*, yaitu suatu ring yang setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antara elemen unit dengan elemen unit reguler ring tersebut. Pada penelitian ini, diselidiki hubungan antara semiring bersih dengan semiring *clear*, yang merupakan perumuman dari ring *clear*.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan melalui kajian pustaka mengenai semiring bersih dan ring *clear* dari berbagai sumber ilmiah. Pada artikel ini, dibahas terlebih dahulu definisi ring dan semiring. Selanjutnya, dibahas mengenai definisi dan sifat elemen idempoten, unit, unit reguler, bersih, dan *clear* pada semiring. Berdasarkan definisi dan sifat-sifat tersebut, dapat didefinisikan semiring bersih dan semiring *clear*, yang kemudian dapat diselidiki hubungan antara keduanya.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Ring dan Semiring

Definisi 1 [1]**.** Misalkan R adalah suatu himpunan tak kosong dan pada R didefinisikan dua operasi biner yang dinotasikan dengan " $+$ " dan " $\cdot$ ", yang selanjutnya disebut operasi penjumlahan dan perkalian. Himpunan R disebut ring terhadap operasi penjumlahan " $+$ " dan perkalian " $\cdot$ " jika memenuhi:

(1) $(R, +)$ merupakan grup komutatif;
(2) operasi " $\cdot$ " di R bersifat asosiatif, yaitu $(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3)$, untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$;
(3) operasi penjumlahan dan perkalian di R bersifat:
   (a) distributif kiri, yaitu $r_1 \cdot (r_2 + r_3) = (r_1 \cdot r_2) + (r_1 \cdot r_3)$, untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$;
   (b) distributif kanan, yaitu $(r_1 + r_2) \cdot r_3 = (r_1 \cdot r_3) + (r_2 \cdot r_3)$, untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$.

Definisi 2 [6]**.** Himpunan tak kosong S dengan operasi biner " $+$ " dan " $\cdot$ " disebut semiring jika memenuhi:

(1) $(S, +)$ merupakan monoid komutatif.
(2) $(S, \cdot)$ merupakan semigrup.
(3) operasi penjumlahan dan perkalian di S bersifat:
   (a) distributif kiri, yaitu $s_1 \cdot (s_2 + s_3) = (s_1 \cdot s_2) + (s_1 \cdot s_3)$, untuk setiap $s_1, s_2, s_3 \in S$.
   (b) distributif kanan, yaitu $(s_1 + s_2) \cdot s_3 = (s_1 \cdot s_3) + (s_2 \cdot s_3)$, untuk setiap $s_1, s_2, s_3 \in S$.

Lebih lanjut, semiring $(S, +, \cdot)$ disebut semiring komutatif jika $(S, \cdot)$ merupakan semigrup komutatif, dan disebut semiring dengan elemen satuan jika $(S, \cdot)$ merupakan monoid [6].

3.2. Elemen Idempoten, Unit, dan Unit Reguler pada Semiring

Definisi 3 [2]**.** Misalkan S suatu semiring. Elemen $e \in S$ dikatakan sebagai elemen idempoten jika $e^2 = e$.

Definisi 4 [2]**.** Misalkan S suatu semiring dengan elemen satuan 1_S. Elemen $a \in S \backslash \{0\}$ dikatakan sebagai elemen unit jika terdapat elemen $b \in S$ sedemikian sehingga $a \cdot b = b \cdot a = 1_S$.

Definisi 5. Misalkan S suatu semiring dengan elemen satuan. Elemen $a \in S$ dikatakan sebagai elemen unit reguler jika terdapat elemen unit $u \in S$ sedemikian sehingga $a = a \cdot u \cdot a$.

Selanjutnya, himpunan semua elemen idempoten, elemen unit, dan elemen unit reguler dari suatu semiring S berturut-turut dapat ditulis sebagai $Id(S)$, $U(S)$, dan $U_{reg}(S)$.

Lemma 1. Jika S suatu semiring dengan elemen satuan, maka $Id(S) \subseteq U_{reg}(S)$.

Bukti: Diketahui S suatu semiring dengan elemen satuan. Diambil sebarang $e \in Id(S)$, sehingga berlaku $e^2 = e$. Selanjutnya, diperhatikan bahwa $e^2 = e \cdot 1_S \cdot e$, dimana 1_S elemen satuan dari S. Oleh karena $1_S \in U(S)$ dan $e = e \cdot 1_S \cdot e$, maka jelas bahwa $e \in U_{reg}(S)$. Selanjutnya, oleh karena untuk setiap $e \in Id(S)$ berlaku $e \in U_{reg}(S)$, maka terbukti bahwa $Id(S) \subseteq U_{reg}(S)$.

p-ISSN: 2580-4596; e-ISSN: 2580-460X

Lemma 2. Jika S suatu semiring dengan elemen satuan, maka $U(S) \subseteq U_{reg}(S)$.

Bukti: Diketahui S suatu semiring dengan elemen satuan. Diambil sebarang $u \in U(S)$, sehingga terdapat $u^{-1} \in S$ sedemikian sehingga $u \cdot u^{-1} = u^{-1} \cdot u = 1_S$, dimana 1_S elemen satuan dari S. Selanjutnya, diperhatikan bahwa $u = u \cdot u^{-1} \cdot u$ dan $u^{-1} \in U(S)$, sehingga jelas bahwa $u \in U_{reg}(S)$. Oleh karena untuk setiap $u \in U(S)$ berlaku $u \in U_{reg}(S)$, maka terbukti bahwa $U(S) \subseteq U_{reg}(S)$.

3.3. Semiring Bersih dan Semiring Clear

Definisi 6 [7]**.** Suatu elemen dari semiring S dikatakan bersih jika dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antara elemen idempoten dan elemen unit di S.

Definisi 7 [7]**.** Semiring S dikatakan semiring bersih jika setiap elemen tak nol dari S merupakan elemen bersih.

Definisi 8. Suatu elemen dari semiring S dikatakan *clear* jika dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antara elemen unit dan elemen unit reguler di S.

Definisi 9. Semiring S dikatakan semiring *clear* jika setiap elemen tak nol dari S merupakan elemen *clear*.

Teorema 1. Setiap semiring bersih merupakan semiring *clear*, tetapi tidak setiap semiring *clear* merupakan semiring bersih.

Bukti: Diambil sebarang semiring bersih S. Ini berarti setiap elemen di S merupakan elemen bersih, sehingga dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antar elemen idempoten dan elemen unit di S. Dari Lemma 1., oleh karena setiap elemen idempoten juga merupakan elemen unit reguler, maka jelas bahwa setiap elemen di S juga dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antara elemen unit dan elemen unit reguler di S. Ini berarti setiap elemen di S merupakan elemen *clear*, sehingga S merupakan semiring *clear*. Dengan demikian, terbukti bahwa setiap semiring bersih merupakan semiring *clear*.

Selanjutnya, dipandang semiring $\mathbb{Z}^{2\times2}$ dan $\begin{bmatrix}12 & 5\\0 & 0\end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times2}$. Jelas bahwa $\begin{bmatrix}12 & 5\\0 & 0\end{bmatrix}$ merupakan elemen *clear* di $\mathbb{Z}^{2\times2}$, sebab $\begin{bmatrix}12 & 5\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}17 & 7\\12 & 5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-5 & -2\\-12 & -5\end{bmatrix}$, dimana $\begin{bmatrix}17 & 7\\12 & 5\end{bmatrix} \in U(\mathbb{Z}^{2\times2})$ dan $\begin{bmatrix}-5 & -2\\-12 & -5\end{bmatrix} \in U_{reg}(\mathbb{Z}^{2\times2})$. Andaikan $\begin{bmatrix}12 & 5\\0 & 0\end{bmatrix}$ merupakan elemen bersih di $\mathbb{Z}^{2\times2}$, maka $\begin{bmatrix}12 & 5\\0 & 0\end{bmatrix}$ dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antara elemen idempoten dan elemen unit dari $\mathbb{Z}^{2\times2}$. Diperhatikan bahwa himpunan semua elemen idempoten dari $\mathbb{Z}^{2\times2}$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$Id(\mathbb{Z}^{2\times2}) = \left\{\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}; a,b,c,d \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ac+cd & bc+d^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}; a,b,c,d \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}a^2+bc & ba+bd\\ca+cd & bc+d^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}; a,b,c,d \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\c(a+d) & bc+d^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}; a,b,c,d \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\k & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\k & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & k\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & k\\0 & 0\end{bmatrix} \middle| k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\right\}$$

Selanjutnya, dapat diselidiki elemen-elemen unit yang mengakibatkan $\begin{bmatrix}12 & 5\\0 & 0\end{bmatrix}$ merupakan elemen bersih di $\mathbb{Z}^{2\times2}$ sebagai berikut:

Elemen Idempoten	Calon Elemen Unit	Invers Calon Elemen Unit	Keterangan
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-$	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2\times 2}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2\times 2}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-$	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2\times 2}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2\times 2}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ -k & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5k-12} & -\frac{5}{5k-12} \\ \frac{k}{5k-12} & \frac{12}{5k-12} \end{bmatrix}$	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2\times 2}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 & 5 \\ -k & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{k} \\ \frac{1}{5} & \frac{11}{5k} \end{bmatrix}$	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2\times 2}$
$\begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12 & 5-k \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{5-k}{12} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2\times 2}$
$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 & 5-k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$-$	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2\times 2}$

Dari tabel tersebut, jelas bahwa $\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tidak dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antara elemen idempoten dan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2\times 2}$. Ini kontradiksi dengan pernyataan sebelumnya, sehingga $\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bukan merupakan elemen bersih di $\mathbb{Z}^{2\times 2}$. Dengan demikian, terbukti bahwa tidak setiap elemen *clear* merupakan elemen bersih. Akibatnya, juga berlaku bahwa tidak setiap semiring *clear* merupakan semiring bersih.

4. KESIMPULAN

Dalam penelitian ini, telah dibahas mengenai definisi semiring bersih dan semiring *clear*, termasuk definisi elemen idempoten, unit, dan unit reguler dalam konteks semiring. Berdasarkan analisis terhadap definisi semiring bersih dan semiring *clear*, serta sifat-sifat elemen idempoten, unit, dan unit reguler pada semiring, diperoleh bahwa setiap semiring bersih merupakan semiring *clear*. Hal ini disebabkan karena setiap elemen idempoten pada semiring juga merupakan elemen unit reguler, sehingga setiap elemen bersih pada semiring juga merupakan elemen *clear*. Namun demikian, dari penelitian ini juga diperoleh bahwa tidak setiap semiring *clear* merupakan semiring bersih.

5. UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Nikken Prima Puspita, M.Sc. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan, bimbingan, dan dukungan yang sangat berarti kepada penulis. Atas kesabaran dan dedikasi beliau, penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada keluarga yang selalu memberikan doa, dukungan, dan semangat kepada penulis, yang selalu menjadi motivasi besar bagi penulis. Tidak lupa penulis mengucapkan terima kasih kepada rekan-rekan dan semua pihak yang turut membantu penulis secara langsung maupun tidak langsung. Semoga segala kebaikan dan dukungan yang telah diberikan senantiasa mendapatkan balasan yang sebaik-baiknya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] S. Wahyuni, I. E. Wijayanti, D. A. Yuwaningsih, dan A. D. Hartanto, *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press, 2021.

[2] D. Das dan S. Kar, "Strongly Clean Semiring," *Proceedings of the National Academy of Sciences India Section A - Physical Sciences*, vol. 94, no. 2, hlm. 249–258, Apr 2024, doi: 10.1007/s40010-024-00875-x.

[3] M. C. Arifin dan I. Ernanto, "IDEMPOTENT ELEMENTS IN MATRIX RING OF ORDER 2 OVER POLYNOMIAL RING $\mathbb{Z}_{p^2q}[x]$," *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, vol. 6, no. 2, hlm. 136–147, Nov 2023, doi: 10.14710/jfma.v6i2.19307.

[4] O. : Rippi, M. Program, S. M. Pendidikan, M. Sekolah, T. Keguruan, dan I. Pendidikan, "STRUKTUR ALJABAR: RING BAHAN AJAR," 2016.

[5] B. V. Zabavsky, O. V. Domsha, dan O. M. Romaniv, "Clear Rings and Clear Elements," *Matematychni Studii*, vol. 55, no. 1, hlm. 3–9, Mar 2021.

[6] A. Rahmawati, "SIFAT-SIFAT SEMIRING DAN KONSTRUKSINYA."

[7] S. Kar dan D. Das, "Clean semiring," *Beitrage zur Algebra und Geometrie*, vol. 64, no. 1, hlm. 197–207, Mar 2023, doi: 10.1007/s13366-022-00628-0.