Prosiding Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami
Vol. 5, No. 1, Februari 2025, pp. 18 – 26
p-ISSN: 2580-4596; e-ISSN: 2580-460X

Variasi Pohon Fraktal Tiga Cabang Menggunakan L-Systems

Kosala Dwidja Purnomo S.Si., M.Si [1], Miskatul Anwar, S.Si. [2], Bagus Juliyanto, S.Si., M.Si [3], Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.[4]
[1,2,3,4]Jurusan Matematika, Universitas Jember
kosala.fmipa@unej.ac.id

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima : 13 November 2024
Direvisi : 22 Januari 2025
Diterbitkan : 10 Februari 2025

Kata Kunci:

Fraktal
Pohon fraktal
L-Systems
Parametric L-Systems
Deterministic L-Systems
Stochastic L-Systems

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk membangkitkan pohon fraktal tiga cabang menggunakan L-Systems dengan variasi berupa parameter ketebalan, panjang, dan sudut percabangan pohon. Pohon fraktal adalah pengembangan bentuk fraktal pohon Pythagoras yang memiliki dua cabang. Dengan variasi parameter ini diharapkan dapat dihasilkan pohon fraktal yang lebih beragam. L-Systems yang digunakan terdiri atas dua jenis, yaitu deterministik dan stokastik. Pohon fraktal yang dibentuk mengikuti aturan produksi dan parameter yang ditentukan. Parameter yang diinputkan harus diperkirakan dan dihitung agar sesuai dengan kondisi riil. Simulasi menunjukkan bahwa, dengan variasi parameter tersebut, pohon fraktal tiga cabang menggunakan L-Systems dapat dikembangkan menggunakan *parametric* L-Systems dengan hasil yang lebih bervariasi.

Copyright © 20XX SIMANIS.
All rights reserved.

Korespondensi:

Kosala Dwidja Purnomo,
Jurusan Matematika,
FMIPA Universitas Jember,
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121
kosala.fmipa@unej.ac.id

1. PENDAHULUAN

Fraktal berasal dari gabungan kata "fractus" yang mengindikasikan ketidakteraturan dan "frangere" yang merujuk pada perpecahan atau pembagian menjadi kepingan-kepingan [1]. Benoit B. Mandelbrot adalah tokoh yang pertama kali memperkenalkan gagasan tentang fraktal. Fraktal memiliki ciri *self-similarity* atau kemiripan diri yang diperoleh melalui proses iteratif. Iterasi adalah repetisi pola tertentu yang membentuk objek fraktal [2]. Beberapa contoh objek fraktal yang terbentuk melalui iterasi mencakup pohon Pythagoras, segitiga Sierpinski, Koch Snowflake, Peano Curve, Mandelbrot Set, dan Lorentz Attractor [3]. Secara umum fraktal digolongkan menjadi dua tipe, yaitu linier dan nonlinier. Contoh fraktal tipe linier yaitu pohon Pythagoras, Segitiga Sierpinski, atau kurva Koch Snowflake yang dibentuk menggunakan algoritma yang sesuai dengan geometri Euclid. Di sisi lain, fraktal tipe nonlinier seperti himpunan Mandelbrot dan himpunan Julia yang terbentuk melalui penggunaan fungsi dinamik nonlinier [4].

Fraktal mengalami perkembangan seiring dengan kemajuan teknologi. Objek-objek alam seperti pohon, gunung, batu, awan, dan lainnya dapat direpresentasikan dalam bentuk gambar tiruan menggunakan prinsip-prinsip fraktal [4]. Salah-satu contoh gambar fraktal tiruan yang menggambarkan pohon sebenarnya adalah pohon fraktal. Pohon fraktal hakikatnya adalah pengembangan dari pohon Pythagoras yang memiliki dua cabang. Pohon fraktal terbentuk dari batang utama dan beberapa cabang yang masing-masing meniru bentuk pohon secara keseluruhan. Secara sederhana, proses ini dimulai dengan tunas yang muncul dari tanah kemudian tumbuh cabang. Dari setiap cabang, tumbuh cabang yang lebih kecil dan proses ini berlanjut sesuai dengan iterasi yang dilakukan [5]. Proses pembuatan pohon fraktal tiga cabang melalui tiga tahapan yaitu

membangkitkan bentuk awal berupa persegi, menentukan bentuk dasar percabangan, dan terakhir membentuk pohon fraktal dengan IFS (*Iterated Function Systems*) [6].

Pohon fraktal dapat dibangkitkan dengan beberapa cara. Diantaranya adalah dengan menggunakan L-Systems dan tranformasi Affine. L-Systems merupakan konsep penulisan ulang dari *string* yang kemudian diinterpretasikan menjadi objek. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh seorang ilmuwan biologi bernama Lindenmayer pada tahun 1968. Lindenmayer menggunakan L-Systems untuk memodelkan proses pertumbuhan tanaman alga yang kemudian konsep ini dikembangkan oleh A.R. Smith untuk menciptakan gambar realistik dan fraktal [7]. L-Systems memiliki tiga komponen utama yaitu variabel (V), aksioma (ω), dan produksi (p) [8]. Penulisan ulang dalam L-Systems merujuk pada *self-similarity* yang memungkinkan pembentukan fraktal dengan mudah [9]. L-Systems dibagi menjadi dua berdasarkan aturan produksinya yaitu *deterministic* L-Systems dan *stochastic* L-Systems. *Deterministic* L-Systems atau D0L-Systems adalah L-Systems yang setiap simbolnya hanya memiliki satu produksi, sedangkan *stochastic* L-Systems yang setiap simbolnya memiliki beberapa aturan produksi dengan penggunaannya tergantung dari probabilitas aturannya [10]. Dalam hal ini pembentukan pohon fraktal menggunakan parametrik L-Systems. *Parametric* L-Systems adalah bagian dari L-Systems di mana setiap simbol memiliki nilai numerik yang disebut parameter. *Parametric* L-Systems terdiri dari beberapa jenis seperti *parametric deterministic* L-Systems dan *parametric stochastic* L-Systems [11].

Penafsiran grafis pada L-Systems merupakan pembuatan representasi visual dari barisan generasi berdasarkan aksioma dan aturan produksi yang telah ditentukan. Simbol-simbol yang dapat ditafsirkan secara grafis pada L-Systems apabila satuan panjang p dan putaran θ sebagai berikut [12]:

F : menggambar ke depan sepanjang p
G : bergerak ke depan p tanpa harus menggambar
\+ : berputar berlawanan arah jarum jam dengan sudut θ
− : berputar searah jarum jam dengan sudut θ

Transformasi Affine adalah suatu teknik yang digunakan untuk menghitung posisi baru dari suatu objek dengan menggunakan matriks [13]. Transformasi ini bersifat linier dan mencakup operasi seperti dilatasi, rotasi, dan translasi [14]. Metode dilatasi adalah suatu teknik yang digunakan untuk memperbesar atau memperkecil gambar atau bentuk geometris pada bidang [15]. Rotasi adalah suatu bentuk transformasi geometrik yang dilakukan dengan memutar objek sesuai dengan sudut yang telah ditetapkan. Translasi adalah tranformasi dengan bentuk tetap, memindahkan objek apa adanya. Setiap titik objek yang di translasi dengan besaran yang sama [14].

2. METODE PENELITIAN

Pada metode penelitian ini dibahas langkah-langkah penelitian yang harus dilakukan agar membentuk pohon fraktal tiga cabang dengan metode L-Systems. Pembangkitan pohon fraktal diawali dengan menentukan tiga komponen L-Systems yaitu simbol (V), aksioma (ω), aturan produksi (p), dan probabilitas (P) untuk *stochastic* L-Systems. Langkah-langkah pembentukan pohon fraktal tiga cabang adalah:

a. menentukan segmen garis awal atau tunas;
b. menduplikasi segmen garis;
c. mendilatasi tiga segmen garis sebagai cabang;
d. merotasi segmen garis dan menggeser segmen garis.

Variasi yang akan digunakan untuk pembentukan pohon fraktal tiga cabang yaitu ketebalan, panjang, rasio, dan sudut percabangan. Menurut Leonardo Da Vinci, setiap ketebalan cabang pohon (L) jika ditambahkan akan sama dengan batang yang di bawahnya (yaitu L_1, L_2, L_3). Dari penjelasan di atas didapatkan Persamaan (1) sampai (4) seperti di bawah. Dalam hal ini d dan r (beserta indeksnya) masing-masing menyatakan diameter atau jari-jari batang.

$$L = L_1 + L_2 + L_3 \tag{1}$$

$$\frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{4}\pi d_1^2 + \frac{1}{4}\pi d_2^2 + \frac{1}{4}\pi d_3^2 \tag{2}$$

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \tag{3}$$

Dari Persamaan (3) dapat dicari nilai rasio ketebalan (r) dari ketiga cabang dengan menentukan rasio ketebalan cabang satu dan dua terlebih dahulu dengan interval antara $0 < r < 1$. Dari penjelasan di atas didapatkan Persamaan (4) sampai (13) seperti di bawah ini.

Dalam hal ini didefinisikan

$$d_1 = r_1 \times d \text{ dan } d_2 = r_2 \times d \tag{4}$$

p-ISSN: 2580-4596; e-ISSN: 2580-460X

sehingga dapat diperoleh

$$d^2 = (r_1 \times d)^2 + (r_2 \times d)^2 + d_3^2 \quad (5)$$

$$d^2 = r_1^2 \times d^2 + r_2^2 \times d^2 + d_3^2 \quad (6)$$

$$d_3^2 = d^2 - d^2 \times (r_1^2 + r_1^2) \quad (7)$$

$$d_3^2 = d^2 \times (1 - r_1^2 - r_1^2) \quad (8)$$

$$d_3 = \sqrt{d^2 \times (1 - r_1^2 - r_1^2)} \quad (9)$$

$$d_3 = d\sqrt{1 - r_1^2 - r_1^2} \quad (10)$$

Kemudian akan dicari nilai r_3

$$d_3 = r_3 \times d \quad (11)$$

$$r_3 = \frac{d\sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2}}{d} \quad (12)$$

$$r_3 = \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2} \quad (13)$$

Penginputan panjang cabang l akan dipengaruhi ketebalan cabang, jadi semakin tebal cabangnya, maka akan semakin panjang cabangnya.

$$l_1 = \frac{l}{R_1}, l_2 = \frac{l}{R_2}, l_3 = \frac{l}{R_3} \quad (14)$$

Untuk nilai $R_1, R_2,$ dan R_3 didapatkan dari faktor skala 2 yang dikurangi rasio ketebalan cabang yang mengakibatkan penginputan interval rasio panjang antara satu sampai dengan dua $(1 < R < 2)$.

$$R_1 = 2 - r_1, R_2 = 2 - r_2, R_3 = 2 - r_3 \quad (15)$$

Setiap cabang memiliki arah rotasi yang berbeda-beda. Besaran sudut cabang α, β dan γ dipengaruhi oleh ketebalan cabang dan nilai θ yang sudah ditetapkan sebelumnya. Semakin besar ketebalan cabang maka semakin kecil sudut cabang.

$$\alpha = (1 - r_1)\theta, \beta = (1 - r_2)\theta, \gamma = (1 - r_3)\theta \quad (16)$$

Visualisasi pohon fraktal tiga cabang menggunakan L-Systems dengan mengubah ketebalan, panjang, dan sudut cabang akan disimulasikan menggunakan program MATLAB. Hasil visualisasi dari simulasi program pohon fraktal akan dianalisis dan dibandingkan antara pohon fraktal yang menggunakan *deterministic* L-Systems dan *stochastic* L-Systems.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dijelaskan perumusan pohon fraktal tiga cabang dengan menggunakan parametric L-systems, lalu dilanjutkan dengan bagaimana pembangkitan pohon fraktalnya dengan pendekatan deterministik dan stokastiknya. Dalam hal ini juga akan dibahas variasi dari parameter ketebalan, panjang, dan sudut percabangan.

3.1. Perumusan Pohon Fraktal Tiga Cabang Menggunakan *Parametric* L-Systems

Pembangkitan pohon fraktal tiga cabang menggunakan L-Systems dimulai dengan menetapkan huruf dan simbol yang akan digunakan dalam aturan produksi. Tiga huruf yang digunakan dalam penelitian ini adalah F, G, dan f, dan setiap huruf tersebut memiliki makna yang serupa yaitu menggambarkan maju dari sebuah segmen garis. Aksioma yang digunakan untuk memvisualisasikan tunas awal ditentukan sebagai huruf f, sebagaimana telah ditetapkan pada tahap sebelumnya. Aturan produksi dibuat bersamaan dengan penentuan ketebalan, panjang, dan sudut percabangan. Setelah mendapatkan aturan produksi, langkah terakhir adalah menentukan faktor probabilitas untuk menerapkan sifat stokastik pada L-Systems. Berikut komponen-komponen L-Systems yang akan digunakan:

$$\left.\begin{array}{c} V = \{f, F, G, -, +, !, \&, ?\} \\ \omega = f \\ p_1 : f \rightarrow (!)[+F][\pm G][-f] \\ p_2 : G \rightarrow (?)[+F][\pm G][-f] \\ p_3 : F \rightarrow (\&)[+F][\pm G][-f] \end{array}\right\} \quad (17)$$

Peraturan produksi tersebut menjelaskan struktur percabangan, panjang, dan ketebalan cabang. Oleh karena itu, penerapan aturan produksi tersebut akan mengakibatkan penyingkatan dan penyusutan pada ketebalan dan panjang batang tanaman.

Parametric L-Systems merupakan bagian dari L-Systems yang membentuk lebih banyak variasi pohon fraktal dengan cara memasukkan ketebalan, panjang, sudut percabangan dan faktor probabilitas untuk *stochastic* L-Systems. Berikut variabel-variabel yang akan digunakan dalam *parametric* L-Systems:

$F(l,d)$: Menggambar cabang pertama dengan panjang (l) dan ketebalan (d)
$G(l,d)$: Menggambar cabang kedua dengan panjang (l) dan ketebalan (d)
$f(l,d)$: Menggambar cabang ketiga dengan panjang (l) dan ketebalan (d)
$+(\alpha)$: Berputar ke kiri sebesar α derajat untuk cabang pertama
$\pm(\beta)$: Berputar ke kiri atau ke kanan sebesar β derajat untuk cabang kedua
$-(\gamma)$: Berputar ke kanan sebesar γ derajat untuk cabang ketiga
& : Mengganti fungsi F pada generasi sebelumnya
? : Mengganti fungsi G pada generasi sebelumnya
! : Mengganti fungsi f pada generasi sebelumnya
r_1 : Rasio ketebalan cabang pertama
r_2 : Rasio ketebalan cabang kedua
r_3 : Rasio ketebalan cabang ketiga
R_1 : Rasio panjang cabang pertama
R_2 : Rasio panjang cabang kedua
R_3 : Rasio panjang cabang ketiga
P : Probabilitas digunakan aturan produksi

Berdasarkan Persamaan (1) sampai (16) didapatkan implementasi ketebalan cabang, panjang cabang, rasio, dan sudut percabangan pada aturan produksi dalam Persamaan (17).

$$\omega = f(l,d)$$
$$p_1 : f(l,d) \rightarrow !(l,d)\left[+\left((1-r_1)\theta\right)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right)\right]\left[\pm\left((1-r_2)\theta\right)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right)\right]$$
$$\left[-((1-r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right)\right] : P_1$$
$$p_2 : G(l,d) \rightarrow ?(l,d)\left[+\left((1-r_1)\theta\right)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right)\right]\left[\pm\left((1-r_2)\theta\right)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right)\right]$$
$$\left[-((1-r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right)\right] : P_2$$
$$p_3 : F(l,d) \rightarrow \&(l,d)\left[+\left((1-r_1)\theta\right)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right)\right]\left[+\left((1-r_2)\theta\right)G\left(\frac{l}{R_2}, * r_2\right)\right]$$
$$\left[-((1-r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right)\right] : P_3$$

Diawali dengan terciptanya tunas dengan panjang sebesar l dan ketebalan sebesar d. Kemudian akan muncul tiga cabang lagi yaitu f, G dan F yang lebih tipis dan pendek dari cabang sebelumnya. Nilai R_1, R_2, dan R_3 mempengaruhi panjang setiap cabang. Ketebalan cabang akan dipengaruhi r_1, r_2, dan r_3. Nilai P_1, P_2, dan P_3 mempengaruhi probabilitas munculnya aturan produksi pada *stochastic* L-Systems.

3.2. Pembangkitan Pohon Fraktal Tiga Cabang Menggunakan *Deterministic* L-Systems

Pada variasi ini akan dibagi menjadi tiga yaitu variasi pohon fraktal dengan mengubah ketebalan dan panjang cabang melalui rasio, variasi pohon fraktal dengan mengubah sudut percabangan dan variasi pohon fraktal dengan mengubah ketebalan, panjang dan sudut percabangan. Pembentukannya akan menggunakan tiga aturan produksi yaitu:

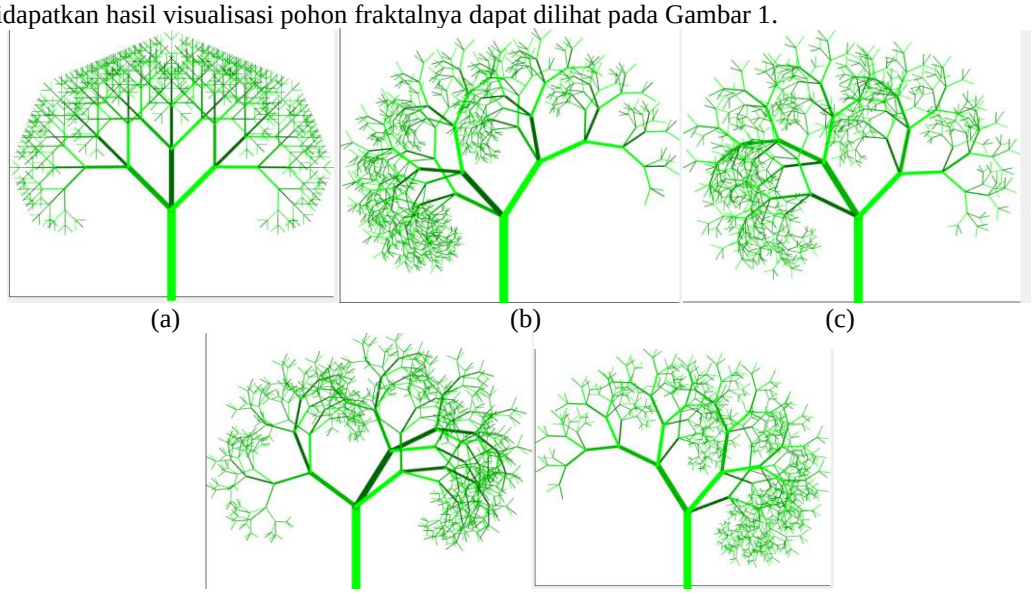
$$Rule\ A = \begin{array}{l} p_1 : f \rightarrow ![+F][G][-f] \\ p_2 : G \rightarrow ?[+F][G][-f] \\ p_3 : F \rightarrow \&[+F][G][-f] \end{array}$$

$$Rule\ B = \begin{matrix} p_1: f \rightarrow ![+F][+G][-f] \\ p_2: G \rightarrow ?[+F][+G][-f] \\ p_3: F \rightarrow \&[+F][+G][-f] \end{matrix}$$

$$Rule\ C = \begin{matrix} p_1: f \rightarrow ![+F][-G][-f] \\ p_2: G \rightarrow ?[+F][-G][-f] \\ p_3: F \rightarrow \&[+F][-G][-f] \end{matrix}$$

a. Variasi Pohon Fraktal Tiga Cabang dengan Mengubah Rasio Ketebalan dan Panjang Cabang

Pada variasi ini akan diubah ketebalan cabang dan panjang cabang melalui rasio. Pohon fraktal yang akan dibentuk berjumlah lima pohon dengan rasio yang berbeda-beda. Untuk ketebalan awal dan panjang awal, serta sudutnya yaitu $d = 10, l = 10, \theta = 107°$ dan iterasi dilakukan tujuh kali. Jika iterasi dilakukan lebih dari tujuh kali maka pohon fraktal yang terbentuk akan terlihat menumpuk pada bagian cabangnya. Dari input di atas didapatkan hasil visualisasi pohon fraktalnya dapat dilihat pada Gambar 1.



(a) (b) (c)

(d) (e)

(a) $r_1 = 0{,}5774$, $r_2 = 0{,}5774$, dan $r_3 = 0{,}5774$, (b) $r_1 = 0{,}4$, $r_2 = 0{,}6$ dan $r_3 = 0{,}6928$, (c) $r_1 = 0{,}7$, $r_2 = 0{,}4$ dan $r_3 = 0{,}5099$, (d) $r_1 = 0{,}5$, $r_2 = 0{,}7$ dan $r_3 = 0{,}5099$, (e) $r_1 = 0{,}7$, $r_2 = 0{,}35$ dan $r_3 = 0{,}6225$

Gambar 1. Pohon Fraktal dengan Variasi Ketebalan dan Panjang Cabang

Pada Gambar 1 dapat dilihat bahwa visualisasi pohon fraktal tiga cabang memiliki beberapa perbedaan. Salah satunya dapat dilihat pada Gambar 1(a) pohon fraktalnya terlihat simetris. Hal ini dikarenakan rasio 1, rasio 2, dan rasio 3 nilainya sama, sehingga ketebalan dan panjang cabangnya akan sama. Untuk cabang tengah penempatannya vertikal keatas, karena tidak adanya sudut yang diinputkan sesuai dengan Rule A. Pada Gambar 1(b) pohon fraktalnya terlihat lebih condong ke kanan, sedangkan Gambar 1(c) lebih condong ke kiri mengikuti rasio paling besar. Pada Gambar 1(b) ketebalan dan panjang yang paling besar terdapat di cabang tiga, karena nilai rasionya yang paling besar, sedangkan pada Gambar 1(c) ketebalan dan panjang yang paling besar terdapat di cabang pertama. Untuk ketebalan dan panjang terkecil terdapat pada cabang pertama untuk Gambar 1(b) dan cabang kedua untuk Gambar 1(c). Pada Gambar 1(c) cabang pertama terletak diantara cabang kedua dan ketiga dikarenakan nilai rasio dari cabang pertama lebih besar dari cabang kedua dan ketiga.

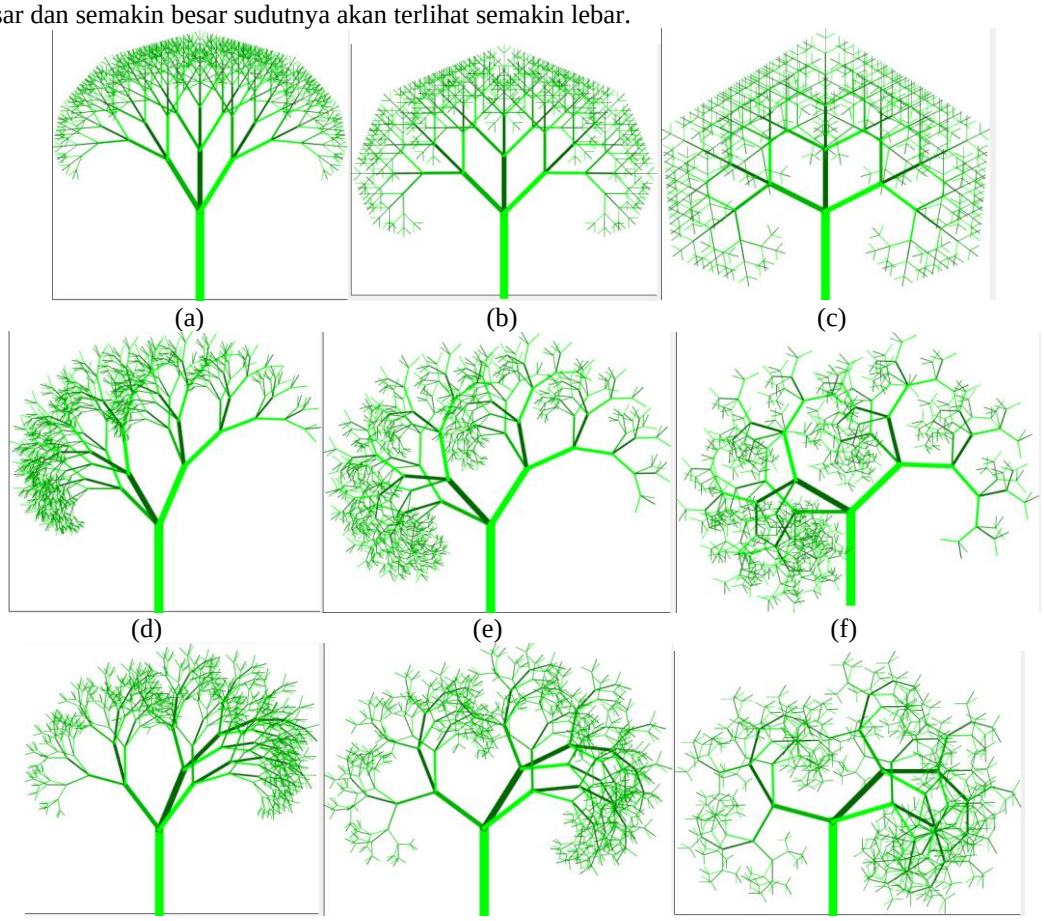
Untuk Gambar 1(d) dan Gambar 1(e) menggunakan Rule C sehingga cabang tengahnya rotasi ke arah kanan. Untuk Gambar 1(d) rasio yang paling besar terdapat pada cabang kedua yang rotasinya ke arah kanan sehingga pohon fraktal terlihat condong ke arah kanan, sedangkan untuk Gambar 1(e) rasio yang paling besar terdapat pada cabang pertama yang rotasinya ke arah kiri sehingga pohon fraktal lebih condong ke kiri. Untuk ketebalan dan panjang paling besar terdapat pada cabang kedua dan yang terkecil pada cabang pertama untuk Gambar 1(d), sedangkan pada Gambar 1(e) yang terbesar terdapat pada cabang pertama dan yang terkecil pada cabang kedua.

Dari kelima gambar tersebut dapat disimpulkan bahwa nilai dari rasio, ketebalan, dan panjang berbanding lurus. Jadi, semakin besar rasionya maka akan semakin tebal dan panjang cabangnya. Rasio terbesar pada cabang mengakibatkan pohon lebih condong ke arah cabang yang memiliki rasio terbesar. Semakin kecil sudut belok pada cabang maka ketebalan dan panjang cabang akan semakin besar.

b. Variasi Pohon Fraktal Tiga Cabang dengan Mengubah Sudut Percabangan

Pada simulasi ini akan memvisualisasikan sembilan pohon fraktal dengan *Rule* dan sudut berbeda-beda. Input sudutnya akan menggunakan tiga variasi yaitu $\theta = 75°$, $\theta = 107°$, dan $\theta = 135°$ dengan $d = 10$ dan $l = 10$. Berikut hasil visualisasi pohon fraktal dengan variasi sudut percabangan dapat dilihat pada Gambar 2.

Pada Gambar 2 dapat dilihat semakin besar sudut (θ) maka akan semakin jauh jarak antar cabangnya. Hal ini mengakibatkan pohon terlihat berimpit jika sudut (θ) kecil dan akan terlihat renggang jika sudut (θ) besar. Pada Gambar 2(a) sampai 2(c) visualisasinya masih simetris dan semakin besar sudut (θ) maka semakin lebar juga pohonnya. Untuk Gambar 2(d) sampai 2(i) pohon fraktalnya lebih condong ke kanan mengikuti rasio terbesar dan semakin besar sudutnya akan terlihat semakin lebar.



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

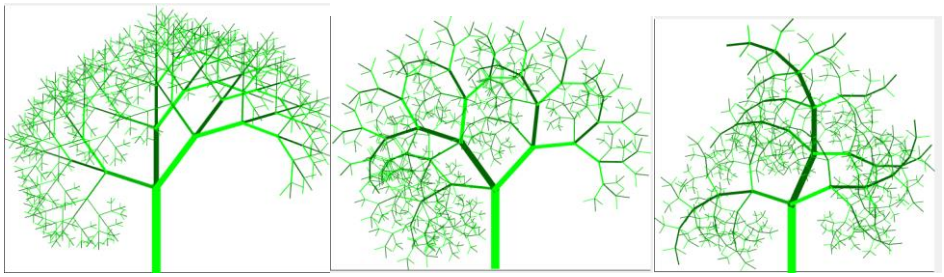
(g) (h) (i)

(a) $\theta = 75°$ dengan *Rule* A, (b) $\theta = 107°$ dengan *Rule* A, (c) $\theta = 150°$ dengan *Rule* A, (d) $\theta = 75°$ dengan *Rule* B (e) $\theta = 107°$ dengan *Rule* B, (f) $\theta = 150°$ dengan *Rule* B, (g) $\theta = 75°$ dengan *Rule* C, (h) $\theta = 107°$ dengan *Rule* C, dan (i) $\theta = 150°$ dengan *Rule* C.

Gambar 2. Pohon Fraktal Tiga Cabang dengan Variasi Sudut Percabangan

c. Variasi Pohon Fraktal Tiga Cabang dengan Mengubah Ketebalan, Panjang, dan Sudut Percabangan

Variasi ini akan mengubah seluruh parameter dari ketebalan, panjang dan sudut percabangan. Pada variasi ini pohon fraktal yang dibentuk sebanyak tiga buah. Berikut merupakan hasil visualisasi pohon fraktal dari input dan aturan produksi diatas dapat dilihat pada Gambar 3.



(a) (b) (c)

(a) $r_1 = 0{,}4$, $r_2 = 0{,}6$ $r_3 = 0{,}6928$, dan $\theta = 120°$ dengan *Rule A*,

(b) $r_1 = 0{,}3$, $r_2 = 0{,}7$ $r_3 = 0{,}6481$, dan $\theta = 120°$ dengan *Rule B*,
(c) $r_1 = 0{,}4$, $r_2 = 0{,}8$ $r_3 = 0{,}4472$, dan $\theta = 120°$ dengan *Rule C*

Gambar 3. Pohon Fraktal dengan Variasi Ketebalan, Panjang, dan Sudut Percabangan

Dari Gambar 3 dapat dilihat bahwa pohon fraktal yang dihasilkan pada Gambar 3(a) tidak simetris dan lebih condong ke kiri. Pohon fraktal pada Gambar 3(b) lebih terlihat rimbun dan lebih condong ke kiri. Pohon fraktal pada Gambar 3(c) bentuknya menyerupai pohon cemara, tetapi cabangnya lebih melengkung ke kiri.

3.3. Pembangkitan Pohon Fraktal Tiga Cabang Menggunakan *Stochastic* L-Systems

Pada bagian ini akan dibentuk pohon fraktal tiga cabang menggunakan *stochastic* L-Systems. Setiap aturan produksi akan memiliki probabilitas masing-masing. Pada bagian ini pohon fraktal menggunakan *stochastic* L-Systems akan dibagi dua variasi yaitu berdasarkan sudut belok cabang tengah dan sudut belok seluruh cabang.

a. Variasi Pohon Fraktal Berdasarkan Sudut Belok Cabang Tengah

Variasi ini akan menggunakan cabang tengah sebagai cabang utama yang akan membentuk variasi pohon fraktal. Variasi ini memiliki akan sembilan aturan produksi dengan sudut belok cabang tengah ke kiri dan kanan atau tidak belok. Komponen yang akan digunakan yaitu $r_1 = 0{,}5$, $r_2 = 0{,}7$, $r_3 = 0{,}5099$, $d = 10$, $l = 10$ dan $\theta = 107°$. Berikut merupakan sembilan aturan produksi yang akan digunakan.

$$p_1: f(l,d) \rightarrow !(l,d)\left[+((1-r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]\left[G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]\left[-((1-r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]: 0.4$$

$$p_2: f(l,d) \rightarrow !(l,d)\left[+((1-r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]\left[+((1-r_2)\theta)G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]\left[-((1-r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]: 0.3$$

$$p_3: f(l,d) \rightarrow !(l,d)\left[+((1-r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]\left[-((1-r_2)\theta)G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]\left[-((1-r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]: 0.3$$

$$p_4: G(l,d) \rightarrow ?(l,d)\left[+((1-r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]\left[G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]\left[-((1-r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]: 0.4$$

$$p_5: G(l,d) \rightarrow ?(l,d)\left[+((1-r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]\left[+((1-r_2)\theta)G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]\left[-((1-r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]: 0.3$$

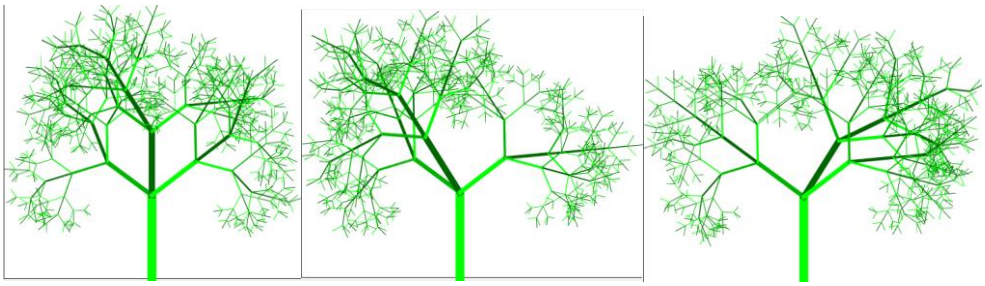
$$p_6: G(l,d) \rightarrow ?(l,d)\left[+((1-r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]\left[-((1-r_2)\theta)G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]\left[-((1-r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]: 0.3$$

$$p_7: F(l,d) \rightarrow \&(l,d)\left[+((1-r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]\left[G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]\left[-((1-r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]: 0.4$$

$$p_8: F(l,d) \rightarrow \&(l,d)\left[+((1-r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]\left[+((1-r_2)\theta)G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]\left[-((1-r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]: 0.3$$

$$p_9: F(l,d) \rightarrow \&(l,d)\left[+((1-r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]\left[-((1-r_2)\theta)G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]\left[-((1-r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]: 0.3$$

Dari kesembilan aturan produksi di atas didapatkan hasil visualisasi pohon fraktal seperti pada Gambar 4.



Gambar 4. Pohon Fraktal *Stochastic* L-Systems Berdasarkan Sudut Belok Cabang Tengah

Dari Gambar 4 dapat dilihat bahwa cabang tengah cenderung tumbuh dengan garis lurus atau tanpa sudut. Hal ini terjadi karena aturan produksi untuk cabang tengahnya yang tanpa sudut memiliki probabilitas yang lebih besar dari aturan produksi yang lain.

b. Variasi Pohon Fraktal Berdasarkan Sudut Belok Semua Cabang beserta Ketebalan dan Panjangnya

Variasi ini memiliki sembilan aturan produksi dengan perubahan sudut belok seluruh cabang. Aturan produksinya menggunakan sudut belok cabang tengah ke kiri atau *Rule* B. Komponen yang akan digunakan adalah $r_1 = 0{,}5$, $r_2 = 0{,}8$, $r_3 = 0{,}3317$, $d = 10$, $l = 10$, dan $\theta = 107°$. Berikut ini merupakan sembilan aturan produksi yang akan digunakan.

$$p_1: f(l,d) \rightarrow !(l,d)\left[+(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]\left[+(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]\left[-(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]: 0.4$$

$$p_2: f(l,d) \rightarrow !(l,d)\left[+(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]\left[+(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]\left[-(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]: 0.3$$

$$p_3: f(l,d) \rightarrow !(l,d)\left[+(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]\left[+(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]\left[-(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]: 0.3$$

$$p_4: G(l,d) \rightarrow ?(l,d)\left[+(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]\left[+(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]\left[-(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]: 0.4$$

$$p_5: G(l,d) \rightarrow ?(l,d)\left[+(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]\left[+(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]\left[-(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]: 0.3$$

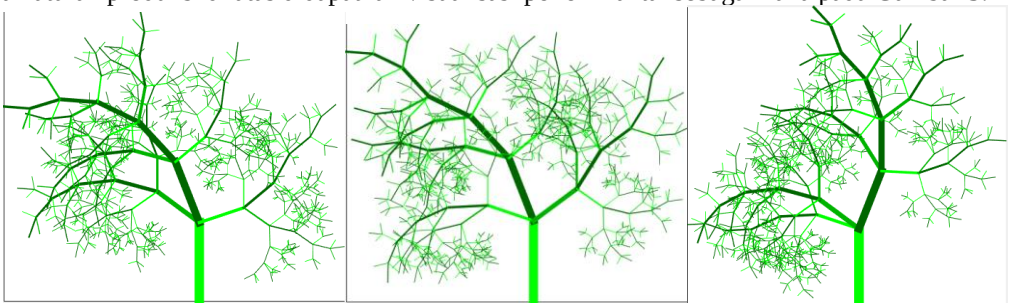
$$p_6: G(l,d) \rightarrow ?(l,d)\left[+(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]\left[+(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]\left[-(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]: 0.3$$

$$p_7: F(l,d) \rightarrow \&(l,d)\left[+(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]\left[+(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]\left[-(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]: 0.4$$

$$p_8: F(l,d) \rightarrow \&(l,d)\left[+(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]\left[+(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]\left[-(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]: 0.3$$

$$p_9: F(l,d) \rightarrow \&(l,d)\left[+(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d*r_2\right)\right]\left[+(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d*r_3\right)\right]\left[-(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d*r_1\right)\right]: 0.3$$

Dari Sembilan aturan produksi di atas didapatkan visualisasi pohon fraktal sebagaimana pada Gambar 5.



Gambar 5. Pohon Fraktal *Stochastic* L-Systems dengan Variasi Sudut Belok Seluruh Cabang

Dari Gambar 5 terlihat bahwa ketiga pohon fraktalnya lebih condong ke arah kanan karena sudut belok cabang tengah ke arah kanan yang memiliki rasio terbesar. Ketiga pohon tersebut kadang memiliki cabang yang terlihat berliku-liku dikarenakan perubahan sudut belok pada setiap cabang.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa pohon fraktal tiga cabang dapat dimodelkan dengan menggunakan *parametric* L-Systems. Parameter yang divariasikan dalam penelitian ini adalah ketebalan, panjang, dan sudut percabangan. Dalam hal ini kedua bentuk L-Systems yang deterministik dan stokastik dapat menghasilkan pohon fraktal tiga cabang. Untuk pengembangan lebih lanjut, dapat

dirumuskan bagaimana modelisasinya untuk kasus tiga dimensi sehingga dapat lebih mendekati model pohon sebenarnya.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih disampaikan kepada Kelompok Riset Computer Aided Geometric Design, Fractals, and Mathematical Analysis (GFracMA) di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember atas dukungannya dalam pendanaan dan masukannya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W.H. Freeman and Company, 1983.
[2] K. D. Purnomo, "Pembangkitan Segitiga Sierpinski Dengan Transformasi Affine Berbasis Beberapa Benda Geometris", *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, Universitas Jember, 2014, pp. 365–375.
[3] Y. Romadiastri, "Batik Fraktal: Perkembangan Aplikasi Geometri", *δELTΔ*, vol. 1, no. 2, pp. 158–164, 2013.
[4] L. D. F. Anggraini, "Geometri Fraktal Dan Transformasi Geometri Sebagai Dasar Pengembangan Motif Batik Sekar Jagad", *Transformasi: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, vol. 3, no. 1, pp. 1–14, 2019.
[5] P. G. Ramadhan, K. D. Purnomo, and F. Ubaidillah, "Variasi Pohon Fraktal Menggunakan L-Systems", *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, vol. 21, no. 2, p. 77, 2021, doi: 10.19184/mims.v21i2.25697.
[6] K. D. Purnomo, D. Wahyuningtyas, and F. Ubaidillah, "Pembangkitan Pohon Fraktal Tiga Cabang dengan Metode Iterated Function System", *Jurnal ILMU DASAR*, vol. 23, no. 1, p. 9, 2022, doi: 10.19184/jid.v23i1.17447.
[7] S. Marlina, Q. Aini, and I. W. Sudiarta, "Pengembangan Motif Batik Sasambo dengan Sistem Lindenmayer", *Eigen Mathematics Journal*, vol. 3, no. 2, pp. 118–124, 2020, doi: 10.29303/emj.v3i2.77.
[8] Juhari, "Stochastic L-Systems", *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, vol. 3, no. 1, pp. 1–6, 2013.
[9] M. K. Faseha & N. Helmi, "Visualisasi Variasi Motif Songket Sambas Menggunakan Metode L-Systems dan Himpunan Julia", *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, vol. 08, no. 4, pp. 1–23, 2016
[10] J. S. Hanan and R. Saskatchewan, *Parametric L-Systems and Their Application to the Modelling and Visualization of Plants*. Regina: Universitas Regina, 1992.
[11] Rozida, "Variasi Sudut Belok Pada Fraktal i-Fibonacci Word dengan Menggunakan L-Systems", Skripsi, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember, 2013.
[12] R. Sholeha, K. D. Purnomo, and A. Riski, "Pengembangan batik fraktal berbasis Koch Snowflake (m, n, c) dan Koch Anti-Snowflake (m, n, c) menggunakan L-System," *Prism. Pros. Semin. Nas. Mat.*, vol. 3, pp. 147–155, 2020.
[13] V. H. Suny, K. D. Purnomo, and F. Ubaidillah, "Pemanfaatan Metode Iterated Function System (IFS) Pada Pembangkitan Kurva Naga", *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, vol. 20, no. 2, p. 89, 2020, doi: 10.19184/mims.v20i2.15780.
[14] D. S. Hadi, *Modul Grafika Komputer*, November. Bandung: Universitas Padjajaran, 2014.
[15] Kusno, "Geometri Rancang Bangun Studi Tentang Desain dan Pemodelan Benda dengan Kurva dan Permukaan Berbantu Komputer", *Jurusan Matematika Fakultas MIPA*, Jember: Universitas Jember, 2017.