Prosiding Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami
Vol.5, No.1, Februari 2025, pp. 34 – 39
p-ISSN: 2580-4596; e-ISSN: 2580-460X

Fungsi Lancip dan Karakteristiknya

Firdaus Ubaidillah[1], Kosala Dwidja Purnomo[2], Bagus Juliyanto[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika, Fakultas MIPA Universitas Jember
[1)]firdaus_u@yahoo.com, [2)]kosala.fmipa@unej.ac.id , [3)]bagus@fmipa.unej.ac.id

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima : 14 November 2024
Direvisi : 26 Januari 2025
Diterbitkan : 10 Februari 2025

Kata Kunci:

Fungsi terdiferensialkan
Fungsi lancip
Fungsi lancip ke atas
Fungsi lancip ke bawah

ABSTRAK

Pada fungsi satu peubah, fungsi terdiferensialkan di suatu titik merupakan fungsi terdiferensialkan kiri dan terdiferensialkan kanan serta nilai derivatif kiri dan derivatif kanannya sama. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengenalkan istilah baru fungsi lancip, yakni fungsi yang terdiferensial kiri dan terdiferensial kanan namun nilai derivatif kiri dan derivatif kanannya tidak sama. Selain itu, akan dibahas beberapa karakteristik dasar dari fungsi lancip dengan memulai dari mengenalkan istilah fungsi lancip ke atas dan fungsi lancip ke bawah. Lebih jauh, akan dibahas beberapa karakteristik lanjutan fungsi lancip yang dituangkan dalam teorema-teorema.

Korespondensi:

Firdaus Ubaidillah,
Jurusan Matematika,
Fakultas MIPA Universitas Jember,
Jl. Kalimantan 37 Jember, Jawa Timur, Indonesia 68121
firdaus_u@yahoo.com

1. PENDAHULUAN

Konsep kalkulus diferensial telah dikembangkan oleh Issac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz menjelang akhir abad ke-17, tetapi dalam konsep yang lebih modern dikembangkan oleh A.L. Cauchy pada awal abad ke-19. Kalkulus diferensial biasanya dipahami sebagai kalkulus diferensial klasik, yang berkaitan dengan fungsi bernilai real atas satu atau lebih peubah-peubah real. Namun definisi modernnya juga dapat mencakup kalkulus diferensial dalam ruang abstrak. Kalkulus diferensial didasarkan pada konsep bilangan real, fungsi, limit, dan kekontinuan [1].

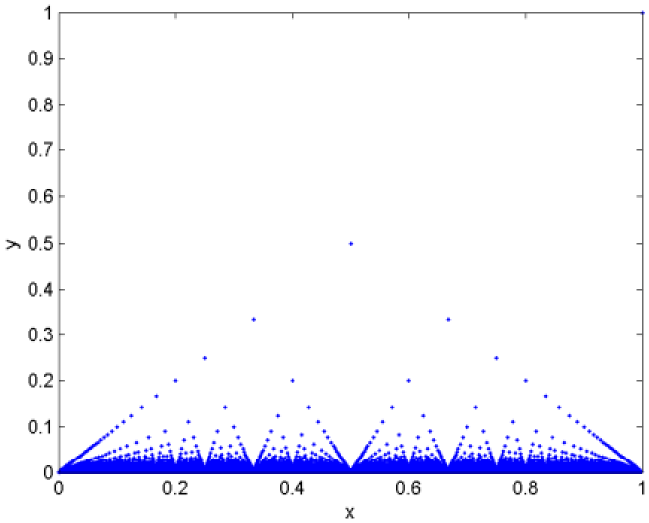
Beberapa matematikawan mengenalkan fungsi-fungsi khusus yang unik, seperti P.G.L. Dirichlet pada tahun 1829 mengenalkan fungsi yang didefinisikan

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, jika } x \text{ rasional} \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

yang merupakan fungsi tidak kontinu dimana-mana pada $\mathbb{R}$ [2], yang selanjutnya disebut fungsi Dirichlet. Karl Weiertrass pada tahun 1872 mengenalkan contoh fungsi yang kontinu pada domainnya tetapi tidak terdiferensialkan dimana-mana [3]. Kemudian Carl Johannes Thomae pada tahun 1875 memodifikasi fungsi Dirichlet menjadi fungsi yang kontinu untuk setiap bilangan irasional dan tidak kontinu untuk setiap bilangan rasional pada domainnya [4], selanjutnya disebut fungsi Thomae, didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{, jika } x = p/q \text{ dan } \gcd(p,q) = 1 \\ 0 & \text{, jika } x \text{ irrasional} \end{cases}$$

yang grafiknya diberikan pada Gambar 1.

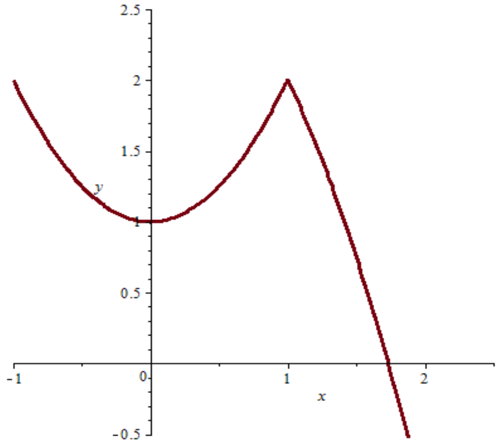


Gambar 1. Grafik fungsi Thomae pada selang $[0, 1]$

Sebagaimana telah diketahui bersama, seperti dalam [2], [5], dan [6], bahwasanya fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terdiferensialkan di titik $c \in [a, b]$ jika fungsi f terdiferensialkan kanan dan terdiferensialkan kiri di titik c serta derivatif kanan dan kiri fungsi f di titik c sama. Fungsi yang tidak terdiferensialkan di suatu titik dapat terjadi karena fungsi tersebut tidak terdiferensialkan kanan atau tidak terdiferensialkan kiri di titik tersebut, atau terdiferensialkan kanan dan kiri tetapi derivatif kanan dan kiri di titik tersebut tidak sama. Grafik fungsi yang terdiferensialkan kanan dan kiri di suatu titik tetapi derivatifnya tidak sama terlihat "lancip". Sebagai contoh fungsi f yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x \leq 1 \\ 3 - x^2, x > 1 \end{cases}$$

merupakan fungsi terdiferensialkan kanan dan terdiferensialkan kiri di $x = 1$ dengan derivatif kanan -2 dan derivatif kiri 2 yang grafiknya diberikan pada Gambar 2, terlihat "lancip" di $x = 1$.



Gambar 2. Grafik fungsi f yang terdiferensialkan kanan dan kiri di $x = 1$ tetapi derivatif kanan dan kiri tidak sama

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengenalkan istilah baru fungsi lancip di suatu titik, yakni fungsi yang terdiferensialkan kanan dan terdiferensialkan kiri tetapi nilai derivatif kanan dan derivatif kiri tidak sama. Lebih jauh, akan digali beberapa karakteristik dasar dari fungsi lancip dan kelancipan fungsi yang disajikan dalam beberapa teorema.

Beberapa Definisi

Sebelum membahas hasil-hasil penelitian, terlebih dahulu ditinjau pengertian atau definisi dan sifat-sifat fungsi terdiferensialkan dan semi-terdiferensialkan sebagai dasar dalam penelitian ini yang diambilkan dari [2] dan [7].

Definisi 1. Diberikan $I \subseteq \mathbb{R}$ selang, $f: I \to \mathbb{R}$ fungsi, dan $c \in I$.

(i). Bilangan L disebut **derivatif kanan** f di c jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta(\epsilon) > 0$ sehingga jika $x \in I$ yang memenuhi $0 < x - c < \delta$ maka

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L\right| < \epsilon$$

Dalam kasus ini, dikatakan f **terdiferensialkan kanan** di c, dan ditulis $f'_+(c) = L$.
Dengan kata lain, derivatif kanan f di c diberikan sebagai

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

asalkan limitnya ada.

(ii). Bilangan L disebut **derivatif kiri** f di c jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta(\epsilon) > 0$ sehingga jika $x \in I$ yang memenuhi $0 < c - x < \delta$ maka

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L\right| < \epsilon$$

Dalam kasus ini, dikatakan f **terdiferensialkan kiri** di c, dan ditulis $f'_-(c) = L$.
Dengan kata lain, derivatif kiri f di c diberikan sebagai

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

asalkan limitnya ada.

(iii). Fungsi f dikatakan **terdiferensialkan** di c jika f terdiferensialkan kanan dan kiri di c serta derivatif kanan dan kirinya sama.

(iv). Fungsi f dikatakan **semi-terdiferensialkan** di c jika f terdiferensialkan kanan dan terdiferensialkan kiri di c.

Akibat dari Definisi 1 (iii) dan (iv), maka fungsi yang terdiferensialkan di c merupakan fungsi semi-terdiferensialkan di c, tetapi tidak sebaliknya.
Berikut beberapa sifat fungsi semi-terdiferensialkan yang diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2. Jika f dan g keduanya fungsi semi-terdiferensialkan di c dengan derivatif kanan f di c adalah $f'_+(c)$, derivatif kiri f di c adalah $f'_-(c)$, derivatif kanan g di c adalah $g'_+(c)$, dan derivatif kiri g di c adalah $g'_-(c)$, maka

(i). untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, αf merupakan fungsi semi-terdiferensialkan dan $(\alpha f)'_+(c) = \alpha f'_+(c)$ dan $(\alpha f)'_-(c) = \alpha f'_-(c)$

(ii). $f + g$ merupakan fungsi semi-terdiferensialkan dan $(f + g)'_+(c) = f'_+(c) + g'_+(c)$ dan $(f + g)'_-(c) = f'_-(c) + g'_-(c)$

2. METODE PENELITIAN

Metode dalam penelitian ini dimulai dengan mendefinisikan istilah baru fungsi lancip ke atas dan fungsi lancip ke bawah. Pengenalan istilah baru fungsi lancip ke atas dan fungsi lancip ke bawah di suatu titik diawali dengan fungsi yang terdiferensialkan kanan dan kiri tetapi derivatif kanan dan kirinya tidak sama, sehingga selisih derivatif kanan dan derivatif kiri tidak nol. Kemudian dari istilah fungsi lancip ke atas dan fungsi lancip ke bawah ini dikembangkan pula istilah fungsi lancip. Untuk menentukan besar kelancipannya dihitung berdasarkan sudut yang dibentuk dari derivatif kanan dan derivatif kiri. Semakin kecil sudut yang dibentuk maka semakin lancip/tajam nilai kelancipannya.

Dari definisi yang telah dijelaskan, kemudian dieksplorasi beberapa karakteristik dasar dan lanjutan fungsi lancip. Kemudian beberapa karakteritik dari fungsi lancip disajikan dalam bentuk teorema-teorema dan akibat-akibatnya yang dilengkapi dengan pembuktiannya.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk mengawali hasil penelitian dan pembahasan ini, dikenalkan terlebih dahulu definisi fungsi lancip ke atas dan fungsi lancip ke bawah di suatu titik.

Definisi 3. Diberikan $c \in [a, b]$ dan $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi semi-terdiferensialkan di titik c dengan derivatif kiri $f'_-(c)$ dan derivatif kanan $f'_+(c)$.
(i). Fungsi f dikatakan **lancip ke atas** di titik c jika $f'_-(c) - f'_+(c) > 0$,
(ii). Fungsi f dikatakan **lancip ke bawah** di titik c jika $f'_-(c) - f'_+(c) < 0$, dan
(iii). Fungsi f dikatakan **lancip** di c jika f lancip ke atas atau lancip ke bawah di c.
Untuk memperjelas definisi fungsi lancip ke atas dan fungsi lancip ke bawah, diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 4. Diberikan dua fungsi $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang masing-masing didefinisikan sebagai

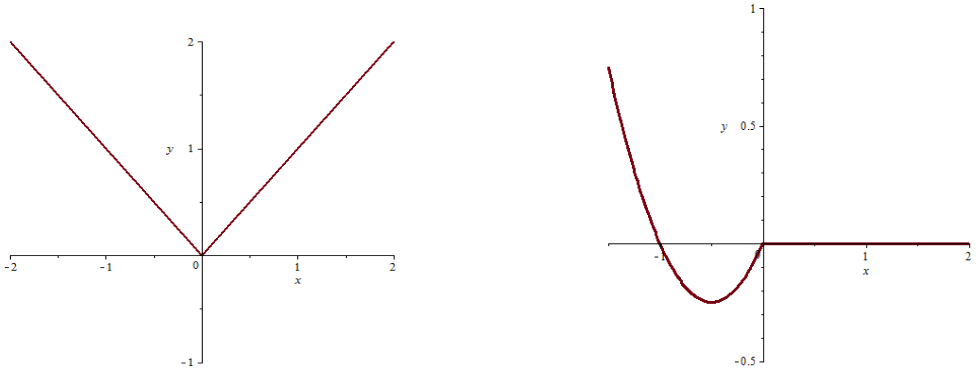
p-ISSN: 2580-4596; e-ISSN : 2580-460X

$$f(x) = |x|, \qquad \text{untuk setiap } x \in \mathbb{R},$$

dan

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0 \\ 0 \quad , & x > 0 \end{cases}$$

Diperhatikan bahwa, $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$, $g'_-(0) = 1$, dan $g'_+(0) = 0$. Karena $f'_-(0) - f'_+(0) = -1 - 1 = -2 < 0$ dan $g'_-(0) - g'_+(0) = 1 - 0 = 1 > 0$, maka f merupakan fungsi lancip ke bawah dan g fungsi lancip ke atas di $x = 0$. Grafik kedua fungsi tersebut diberikan pada Gambar 3.



(a). Grafik fungsi $f(x) = |x|$ (b). Grafik fungsi $g(x) = \begin{cases} x^2 + x, x \leq 0 \\ 0 \quad , x > 0 \end{cases}$

Gambar 3. Grafik fungsi lancip ke bawah dan lancip ke atas di $x = 0$

Jika diperhatikan, suatu fungsi lancip di $x = c$ merupakan fungsi kontinu di $x = c$. Jelaslah, bahwa fungsi yang tidak kontinu di $x = c$ tidak akan bisa menjadi fungsi lancip di titik tersebut. Jadi fungsi lancip di $x = c$ adalah fungsi semi-terdiferensialkan tetapi tidak terdiferensialkan di $x = c$.

Selanjutnya diberikan beberapa karakteristik dasar fungsi lancip ke atas dan fungsi lancip ke bawah dalam beberapa teorema berikut.

Teorema 5. Jika f dan g keduanya fungsi lancip ke atas di $x = c$, maka
(i). a. Untuk $\alpha > 0$, fungsi αf lancip ke atas di $x = c$,
b. Untuk $\alpha < 0$, fungsi αf lancip ke bawah di $x = c$,
(ii) fungsi $f + g$ lancip ke atas di $x = c$.

Bukti:
(i) a. Diberikan $\alpha > 0$. Karena f fungsi lancip ke atas di $x = c$, maka diperoleh

$$(\alpha f)'_-(c) - (\alpha f)'_+(c) = \alpha f'_-(c) - \alpha f'_+(c) = \alpha\big(f'_-(c) - f'_+(c)\big) > 0$$

Jadi αf fungsi lancip ke atas di $x = c$.
b. Diberikan $\alpha < 0$. Karena f fungsi lancip ke atas di $x = c$, maka diperoleh

$$(\alpha f)'_-(c) - (\alpha f)'_+(c) = \alpha f'_-(c) - \alpha f'_+(c) = \alpha\big(f'_-(c) - f'_+(c)\big) < 0$$

Jadi αf fungsi lancip ke bawah.
(ii). Karena f dan g keduanya fungsi lancip ke atas di $x = c$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} (f+g)'_-(c) - (f+g)'_+(c) &= f'_-(c) + g'_-(c) - f'_+(c) - g'_+(c) \\ &= \big(f'_-(c) - f'_+(c)\big) + \big(g'_-(c) - g'_+(c)\big) > 0 \end{aligned}$$

Jadi $f + g$ fungsi lancip ke bawah di $x = c$.

Teorema 6. Jika f dan g keduanya fungsi lancip ke bawah di $x = c$, maka
(i). a. Untuk $\alpha > 0$, fungsi αf lancip ke bawah di $x = c$,
b. Untuk $\alpha < 0$, fungsi αf lancip ke atas di $x = c$,
(ii) fungsi $f + g$ lancip ke bawah di $x = c$,

Bukti:
Bukti serupa dengan bukti pada Teorema 5.

Jika f dan g keduanya fungsi lancip di $x = c$, penjumlahan atau pengurangan kedua fungsi f dan g belum bisa ditentukan kelancipannya, karena hal ini tergantung dari derivatifnya masing-masing. Sebagai contoh, fungsi $f(x) = |x|$ dan $g(x) = -|x|$ keduanya merupakan fungsi lancip di $x = 0$, tetapi $(f + g)(x) = |x| - |x| = 0$ bukan merupakan fungsi lancip di $x = 0$.

Selanjutnya, jika f fungsi lancip di $x = c$ dengan $-\infty < f'_-(c) < \infty$ dan $-\infty < f'_+(c) < \infty$, bilangan $L > 0$ yang didefinisikan

$$L = \frac{1}{\cos^{-1}\left(\frac{-1 - f'_-(c)f'_+(c)}{\sqrt{1 + (f'_-(c))^2}\sqrt{1 + (f'_+(c))^2}}\right)}$$

disebut **kelancipan** atau **ketajaman** fungsi lancip f di $x = c$.

Sebagai contoh, fungsi f dan g yang didefinisikan pada Contoh 4, mempunyai kelancipan di $x = 0$ masing-masing L_1 dan L_2 dengan

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{\cos^{-1}\left(\frac{-1 - f'_-(0)f'_+(0)}{\sqrt{1 + (f'_-(0))^2}\sqrt{1 + (f'_+(0))^2}}\right)} \\ &= \frac{1}{\cos^{-1}\left(\frac{-1 - (-1)(1)}{\sqrt{1 + (-1)^2}\sqrt{1 + (1)^2}}\right)} \\ &= \frac{1}{\cos^{-1}(0)} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{\cos^{-1}\left(\frac{-1 - g'_-(0)g'_+(0)}{\sqrt{1 + (g'_-(0))^2}\sqrt{1 + (g'_+(0))^2}}\right)} \\ &= \frac{1}{\cos^{-1}\left(\frac{-1 - (1)(0)}{\sqrt{1 + (1)^2}\sqrt{1 + (0)^2}}\right)} \\ &= \frac{1}{\cos^{-1}(-1/\sqrt{2})} = \frac{1}{3\pi/4} = \frac{4}{3\pi}. \end{aligned}$$

Jika f dan g keduanya fungsi lancip di $x = c$, fungsi f dikatakan **lebih lancip** dari fungsi g di $x = c$ jika kelancipan f di $x = c$ lebih besar dari kelancipan g di $x = c$. Seperti fungsi f dan g yang diberikan pada Contoh 4, fungsi f lebih lancip dari fungsi g di $x = 0$.

4. KESIMPULAN

Dari hasil penelitian dan pembahasan, diperoleh beberapa kesimpulan berkenaan pengertian dan karakteristik fungsi lancip.

1. Fungsi f dikatakan lancip ke atas di $x = c$ jika derivatif kiri dikurangi derivatif kanan positif, dikatakan lancip ke bawah di $x = c$ jika derivatif kiri dikurangi derivatif kanan negatif, dan dikatakan lancip di $x = c$ jika selisih derivatif kiri dan derivatif kanan tidak nol.
2. Jika f dan g keduanya fungsi lancip ke atas (lancip ke bawah) di $x = c$, maka
   (i). a. Untuk $\alpha > 0$, fungsi αf lancip ke atas (lancip ke bawah) di $x = c$,
   b. Untuk $\alpha < 0$, fungsi αf lancip ke bawah (ke atas) di $x = c$,
   (ii) fungsi $f + g$ lancip ke atas (ke bawah) di $x = c$.
3. Kelancipan atau ketajaman fungsi lancip f di $x = c$ didasarkan pada besaran sudut yang dibentuk dari derivatif kiri dan derivatif kanan, semakin kecil besar sudut maka makin besar kelancipannya.

5. UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Keris-Dimas GFracMa (Kelompok Riset dan Pengabdian Masyarakat Computer Aided Geometric Design, Fractal & Math Analysis) Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember atas bantuan pendanaan di Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai-nilai Islami tahun 2024.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Boman, E., & Rogers, R. (2014). *Real Analysis*. Libretexts
[2] Bartle, R.G., & Sherbert, D.R. (2011). *Introduction to Real Ana;ysis* (4th ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

[3] Jarnicki, M., & Pflug, P. (2015). *Continuous Nowhere Differentiable Functions The Monsters of Analysis*. Springer
[4] Beanland, K., Roberts, J.W., & Stevenson, C. (2009). Modifications of Thomae's Function and Differentiability. *The American Mathematical Monthly,* 116(6), 531-535
[5] Boman, E., & Rogers, R. (2023). *Differential Calculus: From Practice to Theory*. Milne Open Textbooks
[6] Hass, J. R., Heil, C. E., Weir, M. D., & Bogacki, P. (2023). *Thomas' Calculus* (15th ed.). Pearson.
[7] McMullen, C. (2018). *Essential Calculus Skills Practice Workbook with Full Solutions*. Zishka Publishing.