**Prosiding SI MaNIs (Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami)**
Vol.1, No.1, Juli 2017, Hal. 278-287
**p-ISSN: 2580-4596; e-ISSN: 2580-460X**


# Pengkajian Kesalahan Penalaran Analogi Siswa Pra-Kuliah dalam Memecahkan Masalah Berdasarkan Komponen Penalaran Analogi

**I Gede Beni Manuaba[1], Akbar Sutawidjaja[2], Hery Susanto[3]**
[1,3]Pascasarjana Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Malang
[2]Pascasarjana Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Malang

Email: deben.manu@yahoo.co.id, akbar.sutawidjaja fmipa@um.ac.id, hery.susanto.fmipa@um.ac.id

**Info Artikel**

**Riwayat Artikel:**

Diterima: 15 Mei 2017
Direvisi: 1 Juni 2017
Diterbitkan: 31 Juli 2017

**Kata kunci:**

Penalaran Analogi
Kesalahan Penalaran Analogi
Masalah Matematika

**ABSTRAK**

Kemampuan pemecahan masalah matematika dapat meningkat apabila siswa melakukan penalaran analogi dengan benar. Penalaran analogi terdiri dari empat komponen proses yaitu 1. identifikasi masalah sumber, 2. pemahaman struktur masalah sumber, 3. identifikasi kesesuaian struktural antara masalah target dengan masalah sumber, dan 4. adaptasi struktur masalah sumber untuk pemecahan masalah target. Kesalahan penalaran analogi banyak terjadi pada komponen kedua, ketiga dan keempat. Pada komponen kedua, siswa tidak dapat menentukan struktur masalah sumber dengan benar. Pada komponen ketiga, siswa tidak dapat menemukan kesesuaian antara struktur masalah sumber dengan struktur masalah target dan hanya fokus pada kemiripan permukaan (*surface similarity*) antara masalah sumber dengan masalah target. Pada komponen keempat, siswa melakukan kesalahan karena menggunakan kemiripan permukaan (*surface similarity*) untuk memecahkan masalah target.



**Korespondensi:**

First Author,
Pascasarjana Pendidikan Matematika,
Universitas Negeri Malang,
Jl. Semarang No. 5 Malang, Jawa Timur, Indonesia 65145
Email: deben.manu@yahoo.co.id

## 1. PENDAHULUAN

Aktivitas pemecahan masalah merupakan aktivitas yang penting untuk dilakukan oleh siswa dalam belajar matematika. *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) dalam [10] telah merekomendasikan perhatian yang lebih terhadap aktivitas pemecahan masalah siswa dalam pembelajaran matematika sejak tahun 1980 hingga 2000. Bell [2] menyatakan bahwa pemecahan masalah dapat membantu siswa mempelajari fakta, konsep, prinsip dan keterampilan dengan menunjukan penerapan dan keterkaitan objek-objek matematika tersebut. Hudojo [6] menambahkan bahwa melalui pemecahan masalah siswa dapat berlatih mengolah data atau informasi dengan mengorganisasikan konsep, teorema dan keterampilan yang telah dipelajari. Bell [2] juga menyatakan bahwa pemecahan masalah dapat meningkatkan motivasi siswa dalam belajar matematika, membantu meningkatkan kemampuan analitis dan membantu siswa menerapkan kemampuan tersebut pada situasi yang berbeda.

Proses pemecahan masalah yang dilakukan dengan logis dan analitis disebut sebagai penalaran. Penalaran dilakukan secara logis mematuhi kaidah-kaidah logika [15] dengan menggunakan premis-premis [9] berupa fakta, konsep dan prinsip yang sudah diketahui, untuk menghadapi situasi baru [3] [7] yang berupa masalah. Penalaran bersifat analitis dengan menguraikan masalah untuk dapat dipecahkan dari masing-masing bagian [15]. Penalaran dapat digolongkan menjadi penalaran induktif dan penalaran deduktif [16].

Strategi pemecahan masalah yang paling umum digunakan adalah analogi [12]. Analogi merupakan salah satu jenis penalaran induktif [16]. Penalaran analogi dapat didefinisikan sebagai pemecahan masalah baru yang disebut masalah target, dengan menggunakan dan mengadaptasi struktur dari masalah yang sudah diketahui atau pernah dipecahkan yang disebut masalah sumber [4], [5]. Masalah sumber dapat berupa fakta, konsep, teorema dan keterampilan yang telah dipelajari oleh siswa. Aktivitas penalaran analogi dapat meningkatkan kemampuan pemecahan masalah siswa [4]. Kemampuan penalaran analogi dapat membantu siswa menghubungkan pengetahuan matematika baru dengan pengetahuan matematika yang sudah dimiliki, sehingga dapat memfasilitasi proses pemahaman konsep-konsep matematika [1]. Berdasarkan hal-hal tersebut, kemampuan penalaran analogi penting untuk dapat dikuasai oleh siswa.

Pemecahan masalah dengan penalaran analogi melalui empat komponen proses, berdasarkan dua kajian English yang dipublikasikan pada tahun 1993 dan 2004. Komponen pertama yaitu, mengingat masalah yang sudah terpecahkan (masalah sumber) dan memiliki kemiripan tujuan dengan masalah target [4], [5]. Komponen kedua yaitu, memahami struktur dari masalah sumber [4], [5]. Komponen ketiga yaitu, mengidentifikasi kesesuaian antara masalah target dengan masalah sumber, berdasarkan struktur dari masalah sumber [5]. Komponen keempat yaitu, menggunakan kesesuaian tersebut dan mengadaptasi struktur masalah sumber sesuai dengan syarat-syarat pada masalah target, untuk menentukan solusi dari masalah target [4], [5].

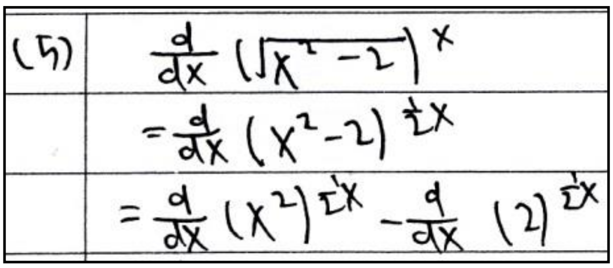
## 2. KESALAHAN PENALARAN ANALOGI

Penalaran analogi memang dapat membantu siswa dalam upaya memecahkan masalah [4], tetapi siswa tidak selalu bisa bernalar analogi dengan benar. Kesalahan penalaran analogi bisa terjadi karena kesalahan menerapkan informasi struktural dari konsep dan prosedur yang pernah dipelajari siswa [11]. Hasil pada kajian Pang & Dindyal [11] menemukan bahwa kesalahan penalaran analogi siswa dalam proses pemecahan masalah target terjadi karena penggunaan kemiripan permukaan (*surface similarity*) antara masalah sumber dengan masalah target. Padahal pada proses pemecahan masalah dengan penalaran analogi, siswa harus menggunakan kesesuaian antara masalah target dengan masalah sumber, berdasarkan struktur masalah sumber [5].

Kajian tentang kesalahan penalaran analogi telah dilakukan oleh Pang & Dindyal 69 siswa tahun ke-12 di Singapura digunakan sebagai subjek penelitian dan ditugaskan untuk memecahkan masalah-masalah matematika sesuai dengan materi yang dipelajari selama dua tahun sebelumnya. Pang & Dindyal [11] menemukan bahwa kesalahan penalaran analogi yang muncul berupa kesalahan penerapan sifat distributif dan kesalahan pemahaman strategi solusi.

### 2.1. Kesalahan Penerapan Sifat Distributif

Kesalahan penalaran analogi berupa kesalahan penerapan sifat distributif yang teridentifikasi yaitu, siswa A menyatakan $(x^2-2)^{\frac{1}{2}x}$ sama dengan $(x^2)^{\frac{1}{2}x}-(2)^{\frac{1}{2}x}$. Siswa A menganggap sifat $(b+c)a=ab+ac$ dengan $a,b,c\in\mathbb{R}$ [13] dapat diterapkan pada fungsi $(x^2-2)^{\frac{1}{2}x}$ [11]. Masalah yang diberikan dan jawaban siswa A ditunjukan pada Gambar 1. Kesalahan siswa A pada masing-masing komponen penalaran analogi ditunjukan pada Tabel 1.




Gambar 1. Jawaban Siswa A yang Melakukan Kesalahan Penerapan Sifat Distributif

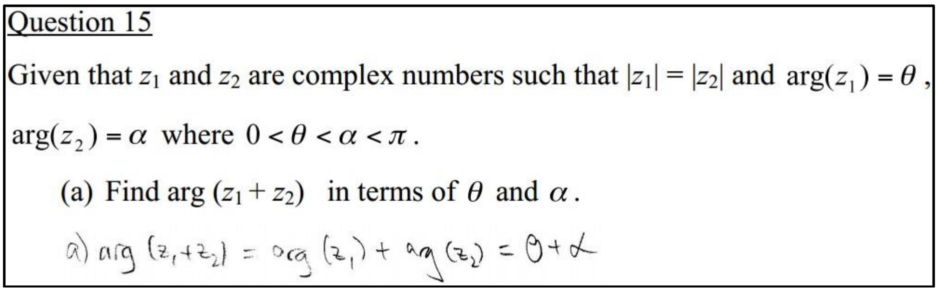
Tabel 1. Kesalahan Siswa A Berdasarkan Komponen Penelaran Analogi

| Komponen | Masalah Target | Masalah Sumber |
|---|---|---|
| | $(x^2-2)^{\frac{1}{2}x} =$ | Sifat distributif $(b+c)a = ab + ac$ |
| Komponen 1 Tujuan Masalah | menentukan bentuk lain yang setara | menunjukan kesetaraan ruas kanan dengan ruas kiri |
| Komponen 2 Identifikasi Struktur masalah | sifat distributif berlaku untuk fungsi eksponen | |
| Komponen 3 Identifikasi Kemiripan Permukaan | bentuk $(x^2-2)^{\frac{1}{2}x}$ mirip dengan bentuk $(b+c)a$ | |
| Komponen 4 Penggunaan Kemiripan Permukaan | $(x^2-2)^{\frac{1}{2}x} = (x^2)^{\frac{1}{2}x} - (2)^{\frac{1}{2}x}$ | |

Siswa A sudah melakukan kesalahan pada komponen kedua dari penalaran analogi. Pada awalnya, siswa A ingin menentukan bentuk lain yang ”setara” dengan $(x^2-2)^{\frac{1}{2}x}$, agar lebih mudah menentukan turunan fungsi terhadap $x$. Siswa A kemudian mengingat sifat distributif $(b+c)a = ab + ac$ yang menunjukan ”kesetaraan” ruas kanan dengan ruas kiri. Tujuan masalah sumber memang sama dengan tujuan masalah target, tetapi siswa A tidak memahami dengan benar struktur dari masalah sumber, bahwa menurut Purcell dkk,. [14] sifat distributif tidak berlaku untuk fungsi eksponen.

Selanjutnya, siswa A juga melakukan kesalahan pada komponen ketiga dan keempat dari penalaran analogi. Siswa A mengasumsikan pasangan $(b+c)a$ dengan $(x^2-2)^{\frac{1}{2}x}$ memiliki kesesuaian (*relational correspondence*). Padahal, $\frac{1}{2}x$ sebagai pangkat dan $a$ bukan sebagai pangkat. Kesesuaian yang diidentifikasi oleh siswa A bukan pada struktur masalah tetapi pada bagian permukaan (*surface*) dari masalah. Pada proses pemecahan masalah dengan penalaran analogi, siswa A seharusnya menemukan dan menggunakan kesesuaian struktur sumber dengan masalah target, bukan menggunakan kemiripan permukaan (*surface similarity*) [4], [5].

Kesalahan penalaran analogi berupa kesalahan penerapan sifat distributif juga dilakukan oleh siswa B yang menyatakan $arg(z_1 + z_2)$ sama dengan $arg(z_1) + arg(z_2)$. Siswa B menganggap sifat $a(b+c) = ab + ac$ dengan $a, b, c \in \mathbb{C}$ [8] dapat diterapkan pada $arg(z_1 + z_2)$ [11]. Masalah yang diberikan dan jawaban siswa B ditunjukan pada Gambar 2. Kesalahan siswa B pada masing-masing komponen penalaran analogi ditunjukan pada Tabel 2.


Question 15

Given that $z_1$ and $z_2$ are complex numbers such that $|z_1| = |z_2|$ and $\arg(z_1) = \theta$, $\arg(z_2) = \alpha$ where $0 < \theta < \alpha < \pi$.

(a) Find arg $(z_1 + z_2)$ in terms of $\theta$ and $\alpha$.

a) $\arg(z_1 + z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta + \alpha$

Gambar 2. Jawaban Siswa B yang Melakukan Kesalahan Penerapan Sifat Distributif

Tabel 2. Kesalahan Siswa B Berdasarkan Komponen Penelaran Analogi

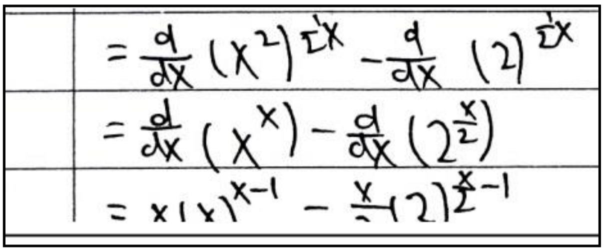
| Komponen | Masalah Target | Masalah Sumber |
|---|---|---|
| | $arg(z_1 + z_2) =$ | Sifat distributif $a(b+c) = ab + ac$ |
| Komponen 1 Tujuan Masalah | menentukan bentuk lain yang setara | menunjukan kesetaraan ruas kanan dengan ruas kiri |
| Komponen 2 Identifikasi Struktur masalah | sifat distributif berlaku pada simbol argumen | |
| Komponen 3 Identifikasi Kemiripan Permukaan | bentuk $arg(z_1 + z_2)$ mirip dengan bentuk $a(b+c)$ | |
| Komponen 4 Penggunaan Kemiripan Permukaan | $arg(z_1 + z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$ | |

Siswa B juga melakukan kesalahan pada komponen kedua dari penalaran analogi. Masalah target yang teridentifikasi oleh siswa B yaitu menentukan bentuk lain yang "setara" dengan $arg(z_1 + z_2)$. Siswa B kemudian mengingat masalah sumber yaitu sifat distributif $a(b + c) = ab + ac$ yang menunjukan "kesetaraan" ruas kanan dengan ruas kiri. Tujuan masalah sumber memang sama dengan tujuan masalah target, tetapi siswa B tidak memahami dengan benar struktur dari masalah sumber, bahwa menurut Kusumawinahyu [8] sifat distributif berlaku apabila $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Siswa B juga melakukan kesalahan pada komponen ketiga dan keempat dari penalaran analogi. Siswa B mengasumsikan pasangan $a(b + c)$ dengan $arg(z_1 + z_2)$ memiliki kesesuaian (*relational correspondence*). Padahal, $arg$ adalah simbol yang menunjukan argumen suatu bilangan kompleks, sedangkan $a$ adalah bilangan kompleks. Kesesuaian yang diidentifikasi oleh siswa B bukan pada struktur masalah tetapi pada bagian permukaan (*surface*) dari masalah. siswa B hanya berfokus pada kemiripan $arg(z_1 + z_2)$ dengan bentuk $a(b + c)$ dan menggunakannya untuk menentukan bentuk lain yang setara, hingga siswa B menetapkan solusi dari masalah target.

### 2.2. Kesalahan Penerapan Strategi

Kesalahan penalaran analogi juga muncul pada lanjutan jawaban dari siswa A, berupa kesalahan penerapan strategi. Pada langkah berikutnya, siswa A menerapkan prosedur penentuan turunan fungsi polinomial pada fungsi eksponensial [11]. Lanjutan jawaban siswa A ditunjukan pada Gambar 3. Kesalahan lanjutan dari siswa A pada masing-masing komponen penalaran analogi ditunjukan pada Tabel 3.



Gambar 3. Lanjutan Jawaban Siswa A yang Melakukan Kesalahan Penerapan Sifat Distributif

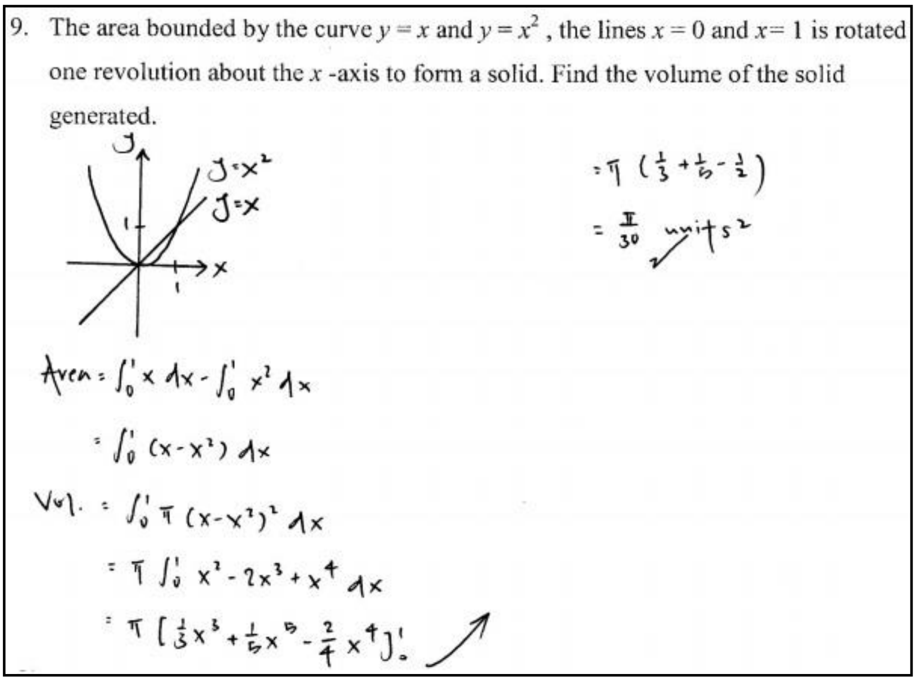
Tabel 3. Kesalahan Lanjutan dari Siswa A Berdasarkan Komponen Penelaran Analogi

| Komponen | Masalah Target | Masalah Sumber |
|---|---|---|
| | $\frac{d(x^x)}{dx} =$ dan $\frac{d(2)^{\frac{x}{2}}}{dx} =$ | $\frac{d(x^2)}{dx} =$ dan $\frac{d(x)^{\frac{1}{2}}}{dx} =$ |
| Komponen 1 Tujuan Masalah | menentukan turunan | |
| Komponen 2 Identifikasi Struktur masalah | aturan pangkat $\frac{d(x^n)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$ tidak hanya berlaku untuk $n$ sebagai konstanta, tetapi juga untuk $n$ sebagai variabel | |
| Komponen 3 Identifikasi Kemiripan Permukaan | bentuk $x^x$ dan $(2)^{\frac{x}{2}}$ mirip dengan bentuk $x^2$dan $(x)^{\frac{1}{2}}$ sehingga cara penentuan turunan juga sama | |
| Komponen 4 Penggunaan Kemiripan Permukaan | $\frac{d(x^x)}{dx} = x(x)^{x-1}$ dan $\frac{d(2)^{\frac{x}{2}}}{dx} = \frac{x}{2}(2)^{\frac{x}{2}-1}$ | |

Siswa A ingin "menentukan turunan" dari $y = x^x$ dan $y = (2)^{\frac{x}{2}}$ terhadap $x$ (masalah target), lalu mengingat cara "menentukan turunan" dari $y = x^2$ dan $y = x^{\frac{1}{2}}$ terhadap $x$ (masalah sumber). Siswa A kembali menemukan masalah sumber yang memiliki tujuan yang sama dengan tujuan dari masalah target, tetapi siswa A tidak memahami dengan benar struktur dari masalah sumber, karena menurut Purcell dkk. [14] aturan pangkat $\frac{d(x^n)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$ hanya berlaku dengan $n$ sebagai konstanta bukan variabel seperti $x$. Sehingga dapat dinyatakan bahwa siswa A kembali melakukan kesalahan pada komponen kedua dari penalaran analogi.

Siswa A kemudian mengasumsikan bahwa pasangan $x$ (pada $y = x^x$) dengan 2 (pada $y = x^2$) dan pasangan $\frac{x}{2}$ (pada $y = (2)^{\frac{x}{2}}$) dengan $\frac{1}{2}$ (pada $y = x^{\frac{1}{2}}$) memiliki kesesuaian (*relational correspondence*). Padahal, $x$ sebagai variabel sedangkan 2 dan $\frac{1}{2}$ sebagai konstanta. Siswa A kembali melakukan kesalahan pada komponen ketiga dan keempat dari penalaran analogi, karena siswa A hanya fokus dengan kemiripan permukaan (*surface similarity*) dan menggunakannya untuk menentukan solusi dari masalah target.

Kesalahan penerapan strategi kembali terjadi tetapi pada masalah yang berbeda. Siswa C mengkonstruksi persamaan volume benda putar tanpa mempertimbangkan pusat berongga yang terbentuk [11]. Masalah yang diberikan dan jawaban siswa C ditunjukan pada Gambar 4. Kesalahan dari siswa C pada masing-masing komponen penalaran analogi ditunjukan pada Tabel 4.


9. The area bounded by the curve $y = x$ and $y = x^2$, the lines $x = 0$ and $x = 1$ is rotated one revolution about the $x$-axis to form a solid. Find the volume of the solid generated.



Area $= \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx$

$= \int_0^1 (x - x^2)\,dx$

Vol. $= \int_0^1 \pi (x - x^2)^2\,dx$

$= \pi \int_0^1 x^2 - 2x^3 + x^4\,dx$

$= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4\right]_0^1$

$= \pi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\pi}{30}$ units$^2$

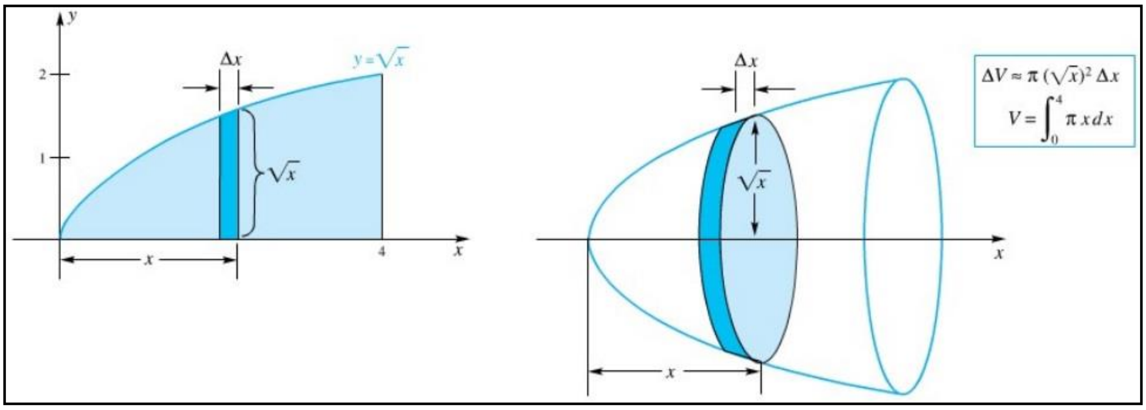
Gambar 4. Jawaban Siswa C yang Melakukan Kesalahan Pemahaman Strategi

Tabel 4. Kesalahan Siswa C Berdasarkan Komponen Penelaran Analogi

| Komponen | Masalah Target | Masalah Sumber |
|---|---|---|
| | mengkonstruksi persamaan volume benda putar yang terbentuk dari daerah dengan batas dua kurva dan diputar terhadap sumbu-$x$. | mengkonstruksi persamaan volume benda putar 1 yang terbentuk dari daerah yang dibatasi satu kurva dan diputar terhadap sumbu-$x$ |
| Komponen 1 Tujuan Masalah | mengkonstruksi persamaan volume benda putar | |
| Komponen 2 Identifikasi Struktur masalah | karena konstruksi persamaan luas daerah yang dibatasi dua kurva $y = x^2$ dan $y = x$ adalah $A = \int_0^1 (x - x^2)dx$, maka konstruksi persamaan volume benda putar yang diputar terhadap sumbu-$x$ menjadi $V = \pi \int_0^1 (x - x^2)^2 dx$. | |
| Komponen 4 Kondisi yang Tidak Diperhatikan | pusat berongga yang terbentuk | |

Siswa C melakukan komponen pertama dari penalaran analogi dengan benar, yaitu mengingat masalah sumber yang memiliki kemiripan tujuan dengan masalah target. Siswa C mengingat masalah sumber yang berkaitan dengan ”daerah yang dibatasi kurva” dan ”volume benda putar”. Siswa C kemudian membuat ilustrasi gambar dan mengkonstruksi persamaan luas ”daerah yang dibatasi dua kurva” $y = x^2$ dan $y = x$ dengan benar yaitu $A = \int_0^1 (x - x^2)dx$. Kesalahan terjadi ketika siswa C mengkonstruksi persamaan ”volume benda putar” menjadi $V = \pi \int_0^1 (x - x^2)^2 dx$.

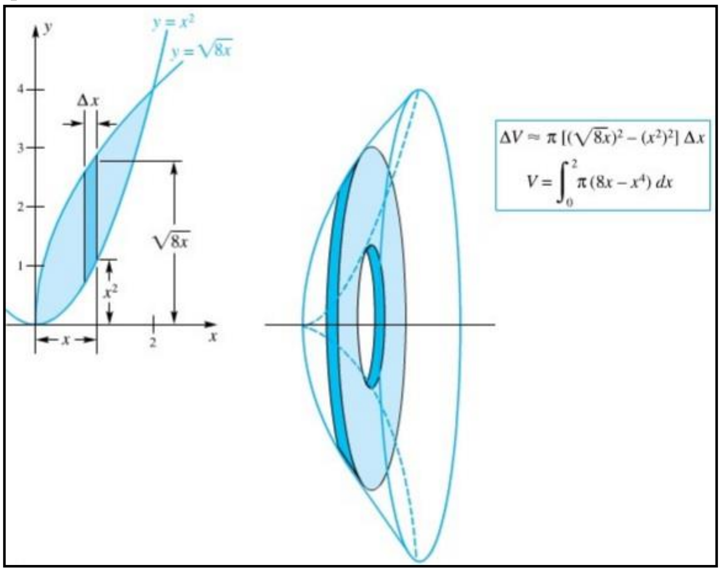
Kesalahan terjadi pada komponen kedua dari penalaran analogi. Siswa C belum memahami kembali dengan benar struktur dari masalah sumber, bahwa menurut Purcell dkk,. [14] cara mengkonstruksi persamaan volume tersebut benar, apabila $y = x^2$ menjadi sumbu putar. Sedangkan pada masalah target, daerah diputar terhadap sumbu-$x$. Gambar 5 menunjukan proses konstruksi persamaan volume benda putar 1 yang terbentuk dari daerah yang dibatasi satu kurva dan diputar terhadap sumbu-$x$ [14].




Gambar 5. Proses Konstruksi Persamaan Volume Benda Putar 1

Siswa C hanya menghafal $A = \int_a^b f(x)\,dx$ sebagai persamaan luas daerah, bukan memahami bahwa luas daerah di bawah kurva $f(x)$ pada selang $a \leq x \leq b$ sebagai definisi integral tentu $\int_a^b f(x)\,dx$. Pada hasil wawancara dikatehui bahwa menurut siswa C, persamaan volume benda putar (yang terbentuk dari daerah dengan batas dua kurva dan diputar terhadap sumbu-$x$) dihasilkan dari persamaan luas daerah. Siswa C meyakini persamaan volume $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$ terbentuk dari persamaan luas $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ dengan $g(x) \leq f(x)$ pada selang $a \leq x \leq b$, karena benda putar terbentuk dari daerah yang dirotasikan. Hal tersebut dapat terjadi karena siswa C hanya hafal bahwa persamaan luas daerah yang dibatasi kurva $f(x)$ pada selang $a \leq x \leq b$ adalah $\int_a^b f(x)\,dx$, kemudian siswa C menghafal persamaan volume benda putar dengan mengkuadratkan dan mengalikan $\int_a^b f(x)\,dx$ dengan $\pi$ menjadi $V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$. Persamaan luas daerah yang dibatasi dua kurva juga dihafalkan sebagai $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$, bukan sebagai kelinieran dari integral tentu yaitu $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ [14]. Sehingga siswa C juga menghafal persamaan volume benda putar yang dibatasi dua kurva pada selang $a \leq x \leq b$ dengan $g(x) \leq f(x)$ sebagai $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$.

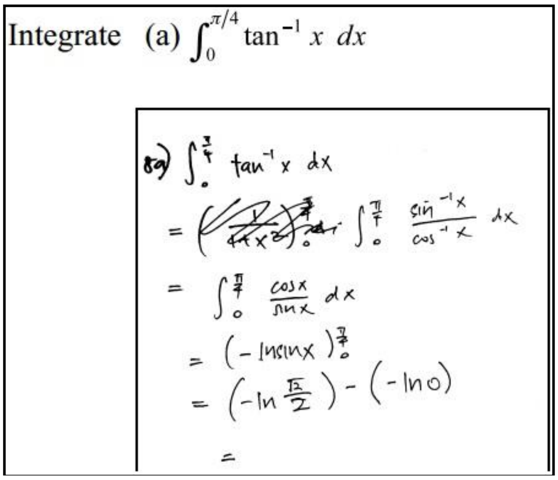
Siswa C tidak memperhatikan kondisi-kondisi yang terdapat pada masalah target, sehingga juga melakukan kesalahan pada komponen keempat. Konstruksi persamaan volume benda putar yang dilakukan siswa C menunjukan bahwa siswa tidak memperhatikan pusat berongga yang terbentuk. Pusat berongga yang terbentuk tentu mempengaruhi konstruksi persamaan volume benda putar. Gambar 5 menunjukan proses konstruksi persamaan volume benda putar 2 yang terbentuk dari daerah dengan batas dua kurva dan diputar terhadap sumbu-$x$ [14].



Gambar 5. Proses Konstruksi Persamaan Volume Benda Putar 2

### 2.3 Kesalahan Pemahaman Simbol

Kesalahan penalaaran analogi berupa kesalahan pemahaman simbol yang teridentifikasi yaitu, siswa D menganggap $\tan^{-1} x$ sama dengan $(\tan x)^{-1}$. Siswa D memaknakan simbol $-1$ pada $\tan^{-1} x$ sebagai invers perkalian yaitu $\frac{1}{\tan x}$, bukan sebagai invers dari fungsi $\tan x$ [11]. Masalah yang diberikan dan jawaban siswa D ditunjukan pada Gambar 6. Kesalahan dari siswa D pada masing-masing komponen penalaran analogi ditunjukan pada Tabel 5.




Gambar 6. Jawaban Siswa yang Melakukan Kesalahan Pemahaman Simbol

Tabel 5. Kesalahan Siswa D Berdasarkan Komponen Penelaran Analogi

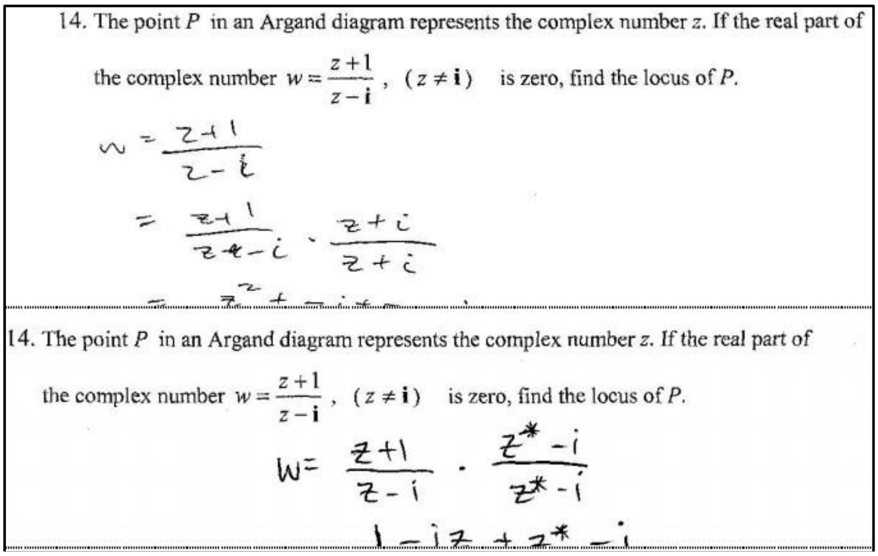
| Komponen | Masalah Target | Masalah Sumber |
|---|---|---|
| | $\tan^{-1} x =$ | $y^{-1} = \frac{1}{y}$ |
| Komponen 1 Tujuan Masalah | menentukan bentuk lain yang setara | ruas kanan setara dengan ruas kiri |
| Komponen 2 Identifikasi Struktur masalah | $y^{-1} = \frac{1}{y}$ juga berlaku untuk $y$ sebagai fungsi | |
| Komponen 3 Identifikasi Kemiripan Permukaan | bentuk $(\tan^{-1} x)$ mirip dengan bentuk $(y^{-1})$ | |
| Komponen 4 Penggunaan Kemiripan Permukaan | $\tan^{-1} x = (\tan x)^{-1} = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{-1} = \frac{\sin^{-1} x}{\cos^{-1} x}$ | |

Siswa D melakukan kesalahan pada komponen kedua dari penalaran analogi. Siswa D melalui komponen pertama dengan mengingat masalah sumber yang memiliki tujuan yang sama dengan masalah target. Siswa D ingin menentukan bentuk lain yang "setara" dengan $\tan^{-1} x$, agar lebih mudah menentukan integral fungsi terhadap $x$ (masalah target). Siswa D kemudian mengingat $y^{-1}$ yang merupakan invers perkalian dari $y$, atau $y^{-1}$ "setara" dengan $\frac{1}{y}$ (masalah sumber). Tujuan masalah sumber memang sama dengan tujuan masalah target, tetapi siswa D tidak memahami dengan benar struktur dari masalah sumber. Purcell dan Varberg [13] menyatakan $y$ memiliki invers perkalian apabila $y \in \mathbb{R}$ dengan $y \neq 0$. Purcell dkk,. [14] juga menyatakan apabila $y$ adalah fungsi, maka $y^{-1} \neq \frac{1}{y}$.

Siswa D kemudian mengasumsikan bahwa pasangan simbol $-1$ (pada $\tan^{-1} x$) dengan $-1$ (pada $y^{-1}$) memiliki kesesuaian (*relational correspondence*). Padahal, simbol $-1$ pada $\tan^{-1} x$ menunjukan invers fungsi sedangkan simbol $-1$ pada $y^{-1}$ menunjukan invers perkalian. Pada langkah berikutnya, siswa D menganggap benar $\tan^{-1} x = (\tan x)^{-1} = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{-1} = \frac{\sin^{-1} x}{\cos^{-1} x}$. Siswa D melakukan kesalahan pada komponen ketiga dan keempat dari penalaran analogi, karena siswa hanya fokus dengan kemiripan permukaan (*surface similarity*) antara $\tan^{-1} x$ dengan $y^{-1}$, dan menggunakannya untuk menentukan solusi dari masalah target.

### 2.4 Kesalahan Menentukan Sekawan dari $[z - i\ ]$

Kesalahan penalaran analogi berupa kesalahan merasionalkan penyebut yang teridentifikasi yaitu, siswa E menganggap $[z + i]$ merupakan sekawan dari $[z - i\ ]$ dan siswa F menganggap $[z^* - i]$ merupakan sekawan dari $[z - i\ ]$ dengan $z$ dan $i \in \mathbb{C}$. Siswa menganggap $[z + i]$ dan $[z^* - i]$ dapat digunakan untuk merasionalkan penyebut $z - i$ pada $\frac{z+1}{z-i}$ dengan mengalikan $\frac{(z+1)}{(z-i)} \cdot \frac{(z^*-i)}{(z^*-i)}$ atau $\frac{(z+1)}{(z-i)} \cdot \frac{(z+i)}{(z+i)}$ [11]. Masalah yang diberikan dan jawaban siswa E dan siswa F ditunjukan pada Gambar 7. Kesalahan dari siswa E pada masing-masing komponen penalaran analogi ditunjukan pada Tabel 6. Kesalahan dari siswa F pada komponen keempat dari penalaran analogi ditunjukan pada Tabel 7.


14. The point $P$ in an Argand diagram represents the complex number $z$. If the real part of the complex number $w = \frac{z+1}{z-\mathbf{i}}$, $(z \neq \mathbf{i})$ is zero, find the locus of $P$.

$w = \frac{z+1}{z-i}$

$= \frac{z+1}{z-i} \cdot \frac{z+i}{z+i}$

14. The point $P$ in an Argand diagram represents the complex number $z$. If the real part of the complex number $w = \frac{z+1}{z-\mathbf{i}}$, $(z \neq \mathbf{i})$ is zero, find the locus of $P$.

$W = \frac{z+1}{z-i} \cdot \frac{z^*-i}{z^*-i}$

Gambar 7. Jawaban Siswa yang Melakukan Kesalahan Menentukan Sekawan dari $[z - i\ ]$

Siswa ingin menyederhanakan $\frac{z+1}{z-i}$ dengan ”merasionalkan” penyebut $z - i$ (masalah target). Siswa kemudian mengingat apabila $v \in \mathbb{C}$ dan $v$ dikalikan dengan sekawannya yaitu $v^*$, maka menghasilkan ”suatu bilangan real” (masalah sumber). Tujuan dari masalah target sama dengan tujuan dari masalah sumber. Siswa juga sudah memahami dengan benar struktur dari masalah sumber bahwa $v \cdot v^* = x^2 + y^2$, karena $v$ dapat dinyatakan dengan $x + yi$ dan $v^*$ dapat dinyatakan dengan $x - yi$ dengan $x$ dan $y \in \mathbb{R}$, maka $(x^2 + y^2) \in \mathbb{R}$. Oleh karena itu, komponen pertama dan kedua sudah dilakukan oleh siswa E dengan benar.

Tabel 6. Kesalaha Siswa E Berdasarkan Komponen Penelaran Analogi

| Komponen | Masalah Target | Masalah Sumber |
|---|---|---|
| | menyederhanakan $\frac{z+1}{z-i}$ dengan merasionalkan penyebut $z - i$. ($z$ dan $i \in \mathbb{C}$). | $v \cdot v^* = x^2 + y^2$<br>$(x^2 + y^2) \in \mathbb{R}$<br>dengan $v \in \mathbb{C}$, $x$ dan $y \in \mathbb{R}$ |
| Komponen 1<br>Tujuan Masalah | merasionalkan penyebut | menghasilkan suatu bilangan real |
| Komponen 2<br>Identifikasi Struktur Masalah Sumber | | $v \cdot v^* = x^2 + y^2$<br>dengan $x$ dan $y \in \mathbb{R}$, karena $(v = x + yi)$ dan $(v^* = x - yi)$ maka $(x^2 + y^2) \in \mathbb{R}$ |
| Komponen 3<br>Identifikasi Kemiripan Permukaan | bentuk $(z - i\ )$ mirip dengan bentuk $(x - yi)$ | |
| Komponen 4<br>Penggunaan Kemiripan Permukaan | Siswa menyatakan sekawan dari $(z - i\ )$ adalah $(z + i)$ | |

Siswa E melakukan kesalahan pada komponen ketiga dan keempat dari penalaran analogi. Siswa E tidak memperhatikan kondisi pada soal, yaitu $z$ yang merupakan bilangan kompleks dan hanya terpaku pada $i$. Bentuk $z - i$ dianggap memiliki kesesuaian (*relational correspondence*) dengan $x - yi$. Padahal yang dianggap kesesuaian oleh siswa E adalah kemiripan permukaan (*surface similarity*), karena $z \in \mathbb{C}$ sedangkan $x \in \mathbb{R}$. Hasil pekerjaan siswa E pada [11] menunjukan bahwa siswa E menganggap $z$ pada soal bukan bilangan kompleks tetapi bilangan real. Siswa E kemudian menyatakan sekawan dari $(z - i\ )$ adalah $(z + i)$.

Tabel 7. Kesalahan Siswa F Berdasarkan Komponen Penelaran Analogi

| Komponen | Masalah Target | Masalah Sumber |
|---|---|---|
| | menyederhanakan $\frac{z+1}{z-i}$ dengan merasionalkan penyebut $z - i$. ($z$ dan $i \in \mathbb{C}$). | $v \cdot v^* = x^2 + y^2$<br>$(x^2 + y^2) \in \mathbb{R}$<br>dengan $v \in \mathbb{C}$, $x$ dan $y \in \mathbb{R}$ |
| Komponen 1<br>Tujuan Masalah | merasionalkan penyebut | menghasilkan suatu bilangan real |
| Komponen 2<br>Identifikasi Struktur Masalah Sumber | | $v \cdot v^* = x^2 + y^2$<br>dengan $x$ dan $y \in \mathbb{R}$, karena $(v = x + yi)$ dan $(v^* = x - yi)$ maka $(x^2 + y^2) \in \mathbb{R}$ |
| Komponen 4<br>Kondisi yang Tidak Diperhatikan | hanya terpaku pada $z$ dan kurang memperhatikan $i$ dan menyatakan $[z - i\ ]^* = [z^* - i]$. | |

Siswa F melakukan kesalahan pada komponen keempat dari penalaran analogi. Siswa F tidak memperhatikan kondisi pada soal, yaitu $[z - i\ ]$ yang merupakan bilangan kompleks dan hanya terpaku pada $z$ dan kurang memperhatikan $i$. Kusumawinahyu [8] menyatakan sifat penjumlahan tertutup berlaku untuk $z$ dan $i \in \mathbb{C}$, sehingga $[z - i\ ] = [z + (-1)] \in \mathbb{C}$. Apabila $z = x + yi$ dengan $x$ dan $y \in \mathbb{R}$, maka sekawan dari $[z - i\ ]$ adalah $[z - i\ ]^* = [(x + yi) - i]^* = [x + (y - 1)i]^* = [x - (y - 1)i] = [(x - yi) + i] = [z^* + i]$. Siswa F yang hanya terpaku pada $z$ dan kurang memperhatikan $i$, pada akhirnya menyatakan $[z - i\ ]^* = [z^* - i]$.

## KESIMPULAN

Kesalahan penalaran analogi banyak muncul pada 1) komponen pemahaman struktur dari masalah sumber, 2) komponen identifikasi kesesuaian antara masalah target dengan masalah sumber, 3) komponen penggunaan kesesuaian dan adaptasi struktur masalah sumber dengan syarat-syarat pada masalah target. Kesalahan pada pemahaman struktur masalah sumber disebabkan oleh kegagalan siswa memahami kembali fakta, konsep, dan operasi atau prosedur pemecahan masalah yang sudah dipelajari, sehingga struktur masalah sumber yang digunakan siswa tidak lengkap. Struktur masalah sumber yang tidak lengkap menyebabkan siswa tidak mampu mengidentifikasi kesesuaian struktural antara masalah target dengan sumber. Siswa kemudian hanya berfokus pada kemiripan permukaan (*surface similarity*) yang ditemukan, dan menggunakannya untuk menentukan solusi masalah target.

## REFERENSI


[1] Amir-Mofidi S, Amiripour P, Bijan-Zadeh MH. Instruction of Mathematical Concepts through Analogical Reasoning Skills. Indian Journal of Science and Technology [Internet]. 2012 Jun [cited 2014 Des 22];5(6):2916-2922. Available from: http://www.indjst.org/index.php/indjst/article/viewFile/30485/26413.

[2] Bell FH. Teaching And Learning Mathematics (In Secondary Schools). Iowa: Wm. C. Brown Company Publishers; 1981. 311 p.

[3] Copi IM. Introduction to Logic (Eighth Edition). New York: Macmillan; 1990. 4 p.

[4] English LD. Reasoning by Analogy in Constructing Mathematical Ideas. [Internet]. 1993 [cited 14 Des 22]; 7-12. Available from: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED370766.pdf.

[5] English LD. editor. Mathematical and Analogical Reasoning of Young Learners. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates; 2004. 7-8 p.

[6] Hudojo H. Pengembangan Kurikulum dan Pembelajaran Matematika. Malang: Universitas Negeri Malang; 2005. 125-126 p.

[7] Keraf G. Argumentasi dan Narasi: Komposisi Lanjutan III. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama; 2007. 5 p.

[8] Kusumawinahyu WM. Catatan Kuliah Fungsi Kompleks. Malang: Program Studi Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya; 2014. 2 p.

[9] Markovits H, Doyon C. Using Analogy to Improve Abstract Conditional Reasoning in Adolescents: Not as Easy as It Looks. European Journal of Psychology of Education [Internet]. 2010 Des [cited 2014 Des 22];26(3):355-372. Available from: http://www.researchgate.net/profile/Henry_Markovits/publication/225757952_Using_analogy_to_improve_abstract_conditional_reasoning_in_adolescents_not_as_easy_as_it_looks/links/0c960534fcd67dc61b000000.pdf.

[10] Musser GL, Burger WF, Peterson BE. Mathematics for Elementary Teachers: A Contemporary Approach (Eighth Edition). New Jersey: John Wiley & Son; 2008. 3 p.

[11] Pang WA, Dindyal J. Analogical Reasoning Errors in Mathematics at Junior College Level. In: R Hunter, B Bicknell, T Burgess, editors. Crossing Divides: Proceedings of The 32nd Annual Conference of The Mathematics Education Research Group of Australasia [Internet]. Palmerston North: Merga; 2009 [cited 14 Des 22]. Available from: https://www.merga.net.au/documents/Pang_RP09.pdf.

[12] Polya G. How to Solve It (Second Edition). Princeton: Princeton University Press; 1973. 43 p.

[13] Purcell EJ, Varberg D. Kalkulus dan Geometri Analitis (Jilid 1). Terjemahan IN Susila, B Kartasasmita, Rawuh. Jakarta: Erlangga; 1999. 3-4 p.

[14] Purcell EJ, Varberg D, Rigdon SE. Calculus with Differential Equations (Ninth Edition). New Jersey: Prentice-Hall; 2006. 35 p, 108 p, 238 p, 282-284 p, 332 p, 342 p.

[15] Subanji. Teori Berpikir Pseudo Penalaran Kovariasional. Malang: Universitas Negeri Malang; 2011. 5 p, 15 p.

[16] Sumarmo U. Pendidikan Karakter dan Pengembangan Berpikir dan Disposisi Matematika dalam Pembelajaran Matematika. Seminar Pendidikan Matematika di NTT [Internet]. 2012 Feb [cited 14 Des 22]; 1-26. Available from: http://utari-sumarmo.dosen.stkipsiliwangi.ac.id/files/2015/09/Makalah-Univ-di-NTT-Februari-2012.pdf.